LPC T 8301

THESE DE DOCTORAT D'ETAT
ES-SCIENCES PHYSIQUES

présentée à
L'UNIVERSITE PIERRE et MARIE CURIE
PARIS VI

par

Pierre BILLOIR

pour obtenir le grade de DOCTEUR ES-SCIENCES

Etude des interactions hadroniques à deux corps chargés, induites sur des protons par un faisceau de π^-, K^- et $\bar{p}$, entre 3 et 12 Gev/c, avec un angle de diffusion dans le centre de masse voisin de 90°

Soutenue le 16 février 1983 devant le jury composé de :

Président: M. Marcel FROISSART

et MM. Michel BAUBILLIER
Jean-Michel BRUNET
Michel FONTANNAZ
Mme. Monique SENE
M. François VANNUCCI

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543515_0011

THESE DE DOCTORAT D'ETAT
ES - SCIENCES PHYSIQUES

présentée à
L' UNIVERSITE PIERRE et MARIE CURIE
PARIS VI

par

Pierre BILLOIR

pour obtenir le grade de DOCTEUR ES-SCIENCES

Etude des interactions hadroniques à deux corps chargés, induites sur des protons par un faisceau de π^-, K^- et $\bar{p}$, entre 3 et 12 Gev/c, avec un angle de diffusion dans le centre de masse voisin de 90°

Soutenue le 16 février 1983 devant le jury composé de :

Président: M. Marcel FROISSART

et MM. Michel BAUBILLIER
Jean - Michel BRUNET
Michel FONTANNAZ
Mme. Monique SENE
M. François VANNUCCI

Résumé :

Les diffusions hadroniques à deux corps à grand angle ont été étudiées par l'expérience WA 13 au C.E.R.N. (Spectromètre Omega), avec un faisceau négatif séparé par cavités RF, sur une cible d'hydrogène. Les sections efficaces de ces réactions décroissent très rapidement, à angle fixé, avec l'énergie ; ceci exigeait de hautes intensités de faisceau et une grande sélectivité, obtenue grâce à un système de déclenchement à plusieurs niveaux, comprenant une chambre de coplanarité munie d'une logique rapide.

Cette thèse décrit les réactions à deux corps chargés dans l'état final (diffusion élastique $\pi^- p$, $K^- p$, $\bar{p}p$, et annihilation de $\bar{p}p$ en deux mésons). La reconstruction cinématique élimine presque tout le fond. En outre, une méthode spéciale d'ajustement de vertex améliore la reconstruction des traces, en utilisant l'information géométrique apportée par leur convergence en un même point.

Si on néglige des structures à t fixé, les sections efficaces différentielles sont compatibles avec les lois de comptage dimensionnel (toutefois $\bar{p}p \longrightarrow \bar{p}p$ semble décroître moins vite que prévu). Différents modèles théoriques sont comparés aux résultats : aucun n'est en accord avec l'ensemble des mesures disponibles.

Ce travail met l'accent sur le traitement des matrices d'erreurs et l'usage d'estimateurs optimaux. Il propose une méthode récurrente d'ajustement de traces, optimisée par rapport à la diffusion multiple.

Abstract :

Large angle two-body hadronic scattering was studied between 3 and 12 GeV/c by the WA 13 experiment at C.E.R.N. (Omega Spectrometer), with a negative RF separated beam, on a hydrogen target. The cross sections of these reactions, at fixed c.m. angle, decrease very rapidly with the energy ; then high beam intensities were required together with high selectivity, obtained thanks to a multilevel triggering system, including a coplanarity chamber associated to a fast logic.

This thesis describes the reactions with two charged final particles ($\pi^- p$, $K^- p$, $\bar{p}p$ elastic scattering and $\bar{p}p$ annihilation into two mesons). The kinematical reconstruction eliminates the background almost completely. Moreover a special vertex fitting method improves the reconstruction of the tracks, using their convergence at the same point to increase the geometrical information.

Neglecting fixed t structures, the differential cross sections are compatible with the dimensional counting laws (however elastic $\bar{p}p$ seems to decrease less rapidly than expected). Different models are compared with the results : no one agrees with the whole set of available data.

This work emphasizes the handling of error matrices and the use of optimal estimation. It proposes a recursive track fitting method, optimized with respect to the multiple scattering.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

INTRODUCTION 1

Conventions et notations 4

CHAPITRE 1 — LE DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

1.1. Le faisceau 7
1.2. Le spectromètre Omega 16
1.3. Le dispositif de déclenchement 21
1.4. La chambre de coplanarité et la logique associée 26

CHAPITRE 2 — LA CHAÎNE DE TRAITEMENT DES ÉVÉNEMENTS

2.1. Paramétrisation du champ magnétique 35
2.2. Reconstruction des traces et filtres 41
2.3. Reconstruction des vertex 50
2.4. Reconstruction cinématique 55

CHAPITRE 3 — AJUSTEMENT GLOBAL DU VERTEX

3.1. Principe et intérêt de la méthode 61
3.2. Algorithmes 63
3.3. Matrices d'erreurs, biais et autocalibration 72
3.4. Utilisation pour la cinématique 78

CHAPITRE 4 — LES SECTIONS EFFICACES DIFFÉRENTIELLES

4.1. Calcul des sections efficaces 89
4.2. Résultats 112
4.3. Comparaisons aux modèles 122

CONCLUSION 135

Annexe 1 : Transformations géométriques et matrices d'erreurs 141
Annexe 2 : Ajustements par moindres carrés 153
Annexe 3 : Causes d'erreurs non gaussiennes 161
Annexe 4 : Diffusion multiple et ajustement de traces 169

INTRODUCTION

Nous présentons ici une étude des résultats de l'expérience WA13, effectuée en 1978 sur le spectromètre OMEGA, dans le Hall Ouest du C.E.R.N., pour étudier les interactions de π^-, K^- et $\bar{p}$ sur une cible de protons, donnant dans l'état final deux hadrons, chargés ou neutres, émis à grand angle (autour de 90°) dans le référentiel du centre de masse ; l'impulsion du faisceau s'étageait de 3 à 12 GeV/c. Cette expérience a été réalisée par une collaboration comprenant le C.E.R.N., le Laboratoire de Physique Corpusculaire du Collège de France, et l'Institut de Physique de l'Université de Neuchâtel (Suisse).

Les sections efficaces différentielles $\frac{d\sigma}{dt}$ de ce type d'interaction à grand transfert ne constituent pas une extrapolation naturelle des sections efficaces à petit angle (petit transfert) : elles décroissent moins vite en énergie, et on estime en général qu'elles reflètent la structure interne des hadrons, en mettant en jeu des collisions "dures" entre leurs composants, supposés ponctuels. La propriété d'invariance d'échelle observée dans les interactions lepton-hadron ou hadron-hadron inclusives, ainsi que d'abondantes données sur la diffusion élastique proton-proton, ont suggéré pour les réactions exclusives à deux corps à haute énergie des lois de la forme (/1 à 6/) :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sigma_0 \left(\frac{s_0}{s}\right)^n f(\cos\theta_{cm})$$

θ_{cm} étant l'angle de diffusion dans le centre de masse.

Les données en pp élastique sont en bon accord avec une telle loi factorisée, pour des impulsions incidentes à partir de quelques GeV/c ($s \simeq 10$ GeV^2), avec n de l'ordre de 10 ; un comportement analogue, quoique plus fluctuant, a été observé pour $\pi^\pm p$ élastique, avec n de l'ordre de 8.

Pour ces dernières réactions au-delà de 10 GeV/c, et les autres réactions à 2 corps au-delà de 5 GeV/c, les données sont rares et peu précises. Le but de l'expérience était de combler certaines de ces lacunes.

Le faisceau S1 du Hall Ouest du C.E.R.N., issu d'une cible primaire frappée par les protons du SPS, était fortement enrichi en K^- et surtout en antiprotons par le séparateur radiofréquence récemment installé, fonctionnant pour des impulsions allant de 3 à 40 GeV/c. Nous avions ainsi accès, grâce à l'intensité du faisceau, à des réactions peu ou pas étudiées jusque là à haute énergie et à grand angle. D'autre part, un système de déclenchement très sélectif, grâce en particulier à une chambre de coplanarité à logique rapide /7,8/ permettait de sélectionner efficacement les interactions donnant deux particules chargées ou deux neutres se désintégrant en mode chargé $(K^o, \Lambda$ ou $\bar{\Lambda})$. En outre, la configuration des traces des événements correspondants les distingue bien du fond qui, au moins pour les événements à deux traces chargées, peut être presque totalement éliminé après reconstruction hors ligne.

Les réactions à deux neutres ($\bar{p}p \to \bar{\Lambda}\Lambda$ ou $\bar{K}^o K^o$, $\pi^- p \to K^o \Lambda$), qui constituaient la motivation initiale de l'expérience, ont été étudiées par ailleurs /9/. Les réactions à deux chargés, que nous étudions ici, ont pu être sélectionnées en même temps grâce au faible taux de déclenchement. Ce sont :

$$\bar{p}p \to \bar{p}p \quad (1)$$
$$\bar{p}p \to K^- K^+ \quad (2)$$
$$\bar{p}p \to \pi^- \pi^+ \quad (3)$$
$$K^- p \to K^- p \quad (4)$$
$$\pi^- p \to \pi^- p \quad (5)$$

Les impulsions du faisceau étaient de 8 et 12 GeV/c pour l'ensemble de ces réactions, ainsi que 5 GeV/c pour la réaction (5), pour comparaison avec les résultats existants. En outre, une série de 4 impulsions de 3.0 à 3.3 GeV/c poursuivaient un but annexe (mise en évidence d'éventuelles fluctuations d'Ericson /10/).

Nous décrirons d'abord l'appareillage expérimental (spectromètre et système de déclenchement), puis la chaîne de traitement des événements, incluant un algorithme d'ajustement du vertex qui utilise la convergence des traces en un même point pour améliorer leur reconstruction géométrique, et donc la précision cinématique.

Nous donnerons ensuite les sections efficaces différentielles obtenues après les pondérations d'acceptance et d'efficacité, et nous les comparerons aux prédictions théoriques.

Nous discuterons, en particulier, et d'une façon critique, le calcul des matrices d'erreurs sur les paramètres ajustés, en traitant en détail deux points :

— leur propagation et transformation, de la mesure des points digitisés à la reconstruction cinématique de l'événement.

— l'effet de la diffusion coulombienne multiple due à la matière traversée, en particulier dans la portion mesurée de la trace ; et les moyens éventuels d'atténuer la perte de précision qui en résulte.

Nous sortirons pour cela du cadre de l'expérience WA13 et nous donnerons des résultats qualitativement valables pour beaucoup de configurations expérimentales.

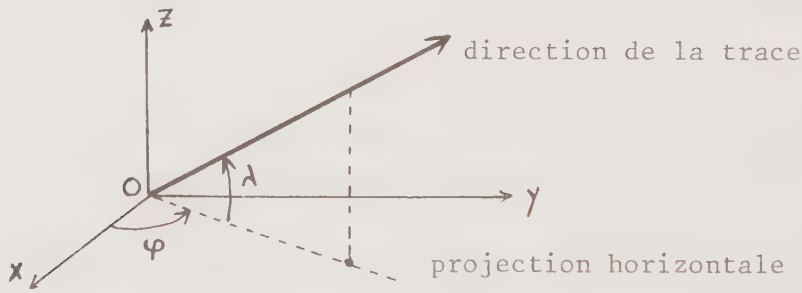
CONVENTIONS ET NOTATIONS

Référentiel de l'OMEGA :

Dans tout ce qui concerne le spectromètre OMEGA on utilise un trièdre orthonormé direct $Oxyz$ dont l'origine est le centre géométrique de l'ensemble formé par les deux bobines, l'axe z étant vertical et l'axe x longitudinal, orienté dans le sens du faisceau, dont la direction fait un angle assez faible (- 20 mrad) avec l'axe Ox .

Coordonnées et angles :

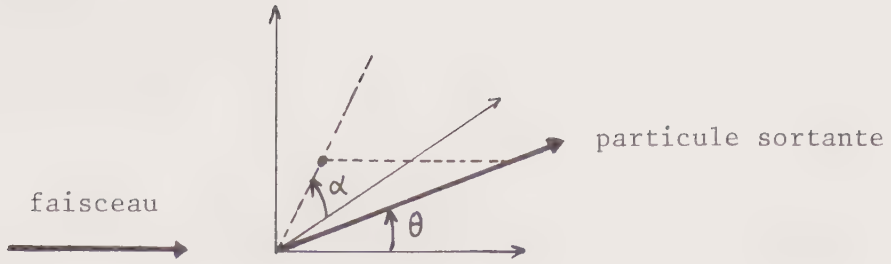
Les minuscules ($x, y, z, \lambda, \varphi$) désigneront respectivement les coordonnées de points sur une trace, l'angle de plongement ("dip") et l'azimuth par rapport au trièdre $Oxyz$, suivant le schéma suivant :



Les majuscules (X, Y, Z, Φ) seront en général réservées à ces mêmes quantités au vertex ou en un point proche du vertex.

Référentiel lié à un événement :

Les axes sont alors définis par la direction du faisceau, et deux directions perpendiculaires, dont l'une peut être choisie horizontale (l'autre étant alors quasi-verticale).



θ désignera l'angle d'une particule sortante par rapport à la direction du faisceau. Si on ne précise pas laquelle, il s'agira de la particule de même charge que le faisceau (donc ici négative).

θ_{cm} désignera ce même angle, dans le référentiel du centre de masse (déduit du précédent par une transformation de Lorentz dans la direction du faisceau).

L'angle noté α dans le schéma ci-dessus sera nommé "angle azimuthal" dans le chapitre 4, bien qu'il soit différent de l'angle φ dans le référentiel de l'Omega.

Notations diverses :

$\vec{p}$: trivecteur impulsion ; p : son module

E : énergie

$\vec{B}$: champ magnétique ($\vec{H}$ dans les annexes pour éviter les ambiguïtés de notation)

R : rayon de courbure

S : signe physique ($\pm$ 1)

s, t, u : variables de Mandelstam usuelles pour une réaction à deux corps.

σ, $\frac{d\sigma}{dt}$: section efficace, section efficace différentielle.

Dans un contexte différent, σ désignera aussi des incertitudes sur des mesures ou des paramètres, ou des matrices de covariance.

C (convergent): événement à 2 corps chargés dont les traces tendent à se rapprocher sous l'effet du champ magnétique.

D (divergent): événement dont les traces tendent à s'éloigner.

Les quatre impulsions de faisceau 3.0, 3.1, 3.2 et 3.3 GeV/c
seront parfois regroupées sous l'étiquette générale 3 GeV/c (sans décimale).

CHAPITRE 1

LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL

1.1. LE FAISCEAU.

1.1.1. Caractéristiques générales du faisceau S1.

1.1.2. Le séparateur radiofréquences.

1.1.2.1. Principe

1.1.2.2. Séparation à basse impulsion

1.1.2.3. Séparation à haute impulsion

1.1.3. Identification du faisceau.

1.1.4. Spectromètre et chambres de mesure.

1.1.4.1. Spectromètre

1.1.4.2. Chambres

1.1.5. Données de calibration.

1.2. LE SPECTROMETRE OMEGA.

1.2.1. L'aimant.

1.2.2. Les chambres à étincelles.

1.2.3. Les caméras.

1.2.4. Les marques fiducielles.

1.2.5. Les chambres proportionnelles multifils.

1.3. LE DISPOSITIF DE DECLENCHEMENT.

1.3.1. Organisation d'ensemble.

1.3.2. Le détecteur d'interaction.

1.3.3. Le détecteur de neutres.

1.3.4. Les compteurs de multiplicité.

1.3.5. La condition de grand angle.

1.4. LA CHAMBRE DE COPLANARITE ET LA LOGIQUE ASSOCIEE.

1.4.1. Motivation.

1.4.2. Description de la chambre.

1.4.3. La logique associée.

1.4.3.1. Configurations acceptables

1.4.3.2. La méthode d'adressage dispersé.

1.4.3.3. La fonction d'adressage

CHAPITRE 1

LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL

1.1. LE FAISCEAU.

1.1.1. Caractéristiques générales du faisceau S1 /11,12/.

L'ensemble de la ligne de faisceau (d'une longueur de 231 m) est schématisé sur la fig. 1.1. Les bouffées de protons (environ $1{,}4.10^{12}$ toutes les 8,4 s) extraites du SPS viennent frapper une cible de béryllium. Le faisceau secondaire, d'impulsion maximale 40 GeV/c, produit autour de 0°, a une acceptance de 50 μsr et une dispersion en impulsion de 1% ; un système classique d'aimants analyseurs d'impulsion et focaliseurs fournit, en l'absence de séparation de masse, les caractéristiques suivantes en fin de ligne, à pleine ouverture :

		3 GeV/c	8 GeV/c	12 GeV/c
Nombre de particules par bouffée	π^-	8.10^6	$1{,}1.10^8$	2.10^8
	K^-	-	4.10^5	$2{,}6.10^6$
	$\bar{p}$	$1{,}4.10^5$	$1{,}4.10^6$	3.10^6
Dispersion spatiale	vert.	10 mm	6 mm	5 mm
	hor.	8 "	10 "	10 "
Dispersion angulaire	vert.	1,5 mrad	1,6 mrad	1,3 mrad
	hor.	2,3 "	2,5 "	1,4 "

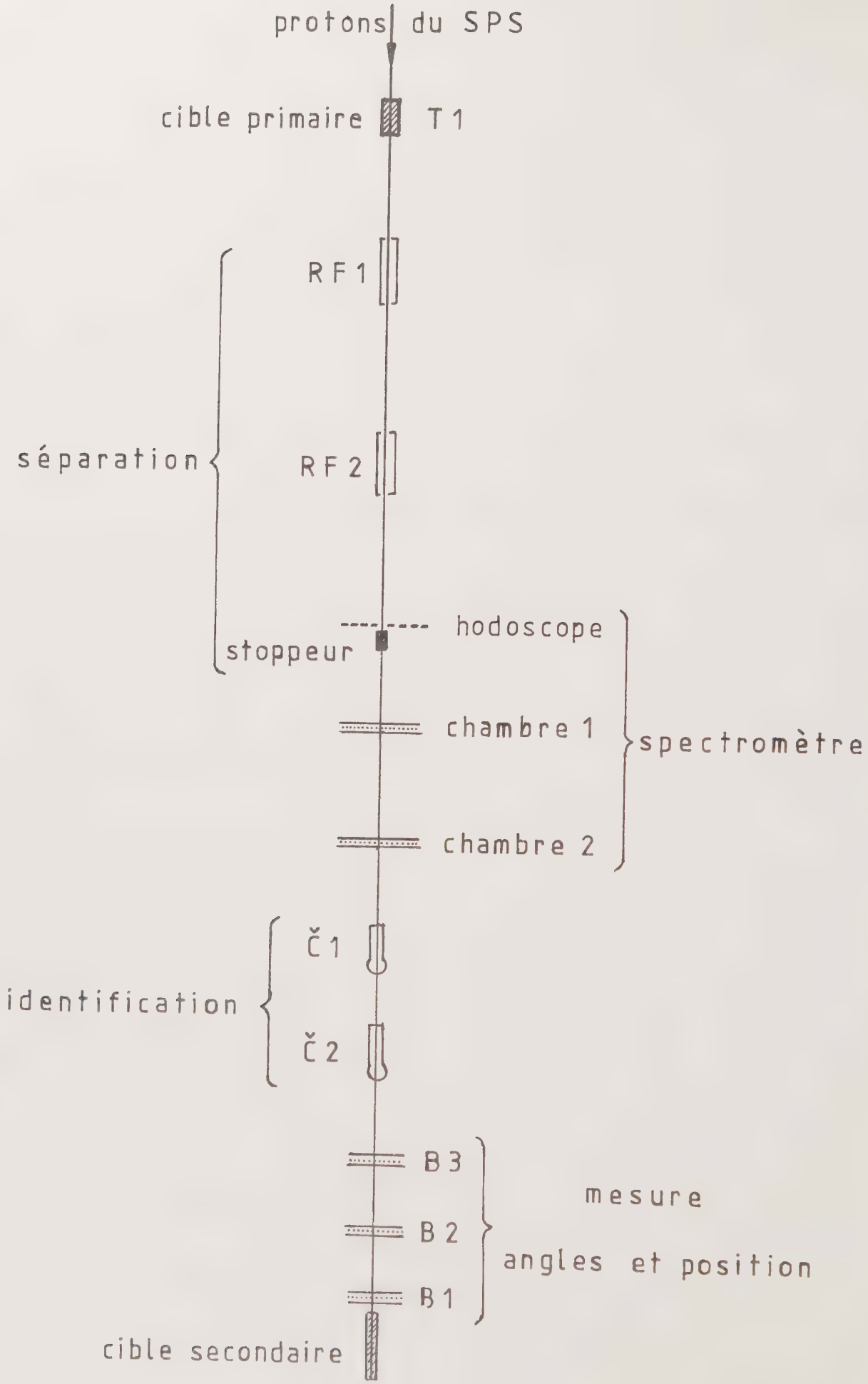

protons du SPS
cible primaire T1
RF1
RF2
séparation
hodoscope
stoppeur
chambre 1
chambre 2
spectromètre
Č1
Č2
identification
B3
B2
B1
mesure
angles et position
cible secondaire

FIG. 1.1

1.1.2. Le séparateur radio-fréquences /13, 14/ :

1.1.2.1. Principe :

Il a pour but d'arrêter le plus possible de pions (et d'électrons s'ils sont nombreux) tout en laissant passer la plupart des antiprotons, ou des kaons, ou les deux (à certaines énergies).

Il est formé de deux cavités supraconductrices en niobium longues de 2,74 m, distantes de 83 m et oscillant à une fréquence d'environ 2866 MHz, avec un champ électrique maximal de 1,2 MV/m (l'amplitude nominale de 2 MV/m n'ayant pas été atteinte pour cette expérience), de direction verticale.

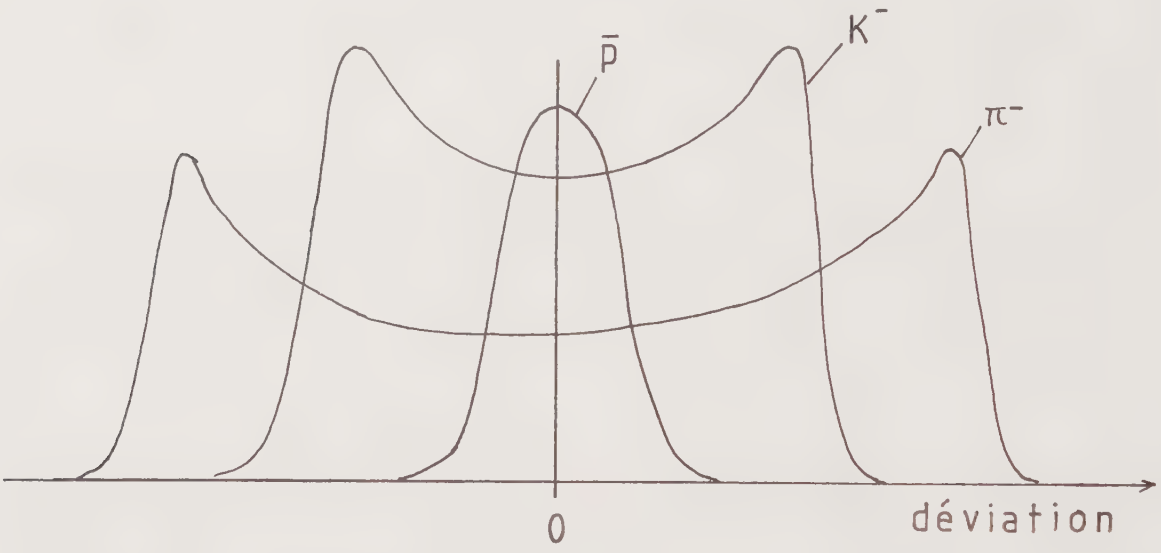
Chacune comporte 104 cellules juxtaposées dont la phase est décalée de façon à produire un champ progressif se déplaçant à la vitesse de la lumière, si bien que les particules de grand β subissent un champ lentement variable (un déphasage total inférieur ou égal à 2π pour la traversée d'une cavité, et même pratiquement nul pour des pions de grande impulsion).

Le mode de séparation est différent suivant la gamme d'impulsion, la limite se situant environ à 8 GeV/c.

1.1.2.2. Séparation à basse impulsion.

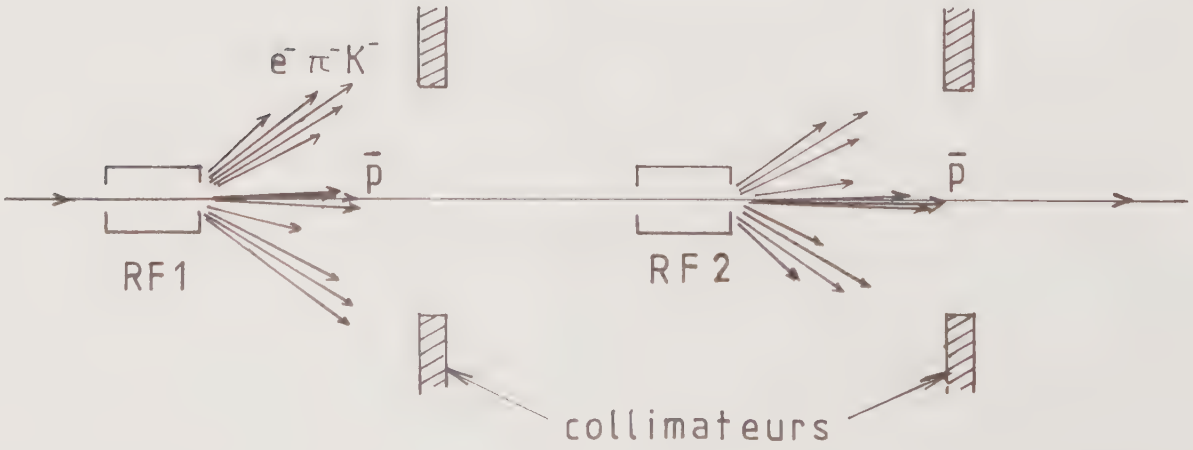
Ce mode est le plus simple dans son principe. Chaque cavité fonctionne en séparateur simple et leurs effets s'ajoutent. Si l'on veut enrichir le faisceau en $\bar{p}$, on règle le déphasage des cellules successives de façon qu'un $\bar{p}$ ayant l'impulsion nominale subisse une période complète du champ électrique, donc une déviation nulle quel que soit l'instant de son arrivée. Les autres particules ne subiront

qu'une fraction de période (dépendant de leur masse) donc une déviation totale non nulle en général, dépendant sinusoïdalement du temps d'arrivée ; il en résulte pour ces particules une distribution de l'angle de déviation relevée sur les bords.



Un collimateur permet donc d'éliminer beaucoup de particules légères en laissant passer la plupart des antiprotons.

La deuxième cavité est utilisée de la même manière pour améliorer le rapport d'enrichissement.



1.1.2.3. Séparation à haute impulsion.

C'est le mode pour lequel le séparateur à deux étages a été conçu. Les particules étant alors toutes ultrarelativistes, il n'est plus possible de réaliser des déphasages très différents pour les différentes masses sur une longueur inférieure à 3 m.

On règle alors la phase relative entre les deux cavités de façon à ce que les pions (ou les électrons, ce qui revient pratiquement au même) subissent dans la deuxième cavité une déflection toujours exactement opposée à celle de la première, c'est à dire que la phase relative est égale à π (mod. 2π) pour les pions.

Soit m_π la masse du pion et v_π sa vitesse pour une impulsion p, et V la vitesse d'une autre particule de masse M, pour la même impulsion. Pour des particules ultrarelativistes, on peut écrire :

$$\frac{v}{c} = \frac{p}{\sqrt{m^2c^2+p^2}} \simeq 1 - \frac{m^2c^2}{2p^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{v} \simeq \frac{1}{c}\left(1 + \frac{m^2c^2}{2p^2}\right)$$

Il en résulte que la différence des temps de parcours sur la distance L séparant les deux cavités vaut :

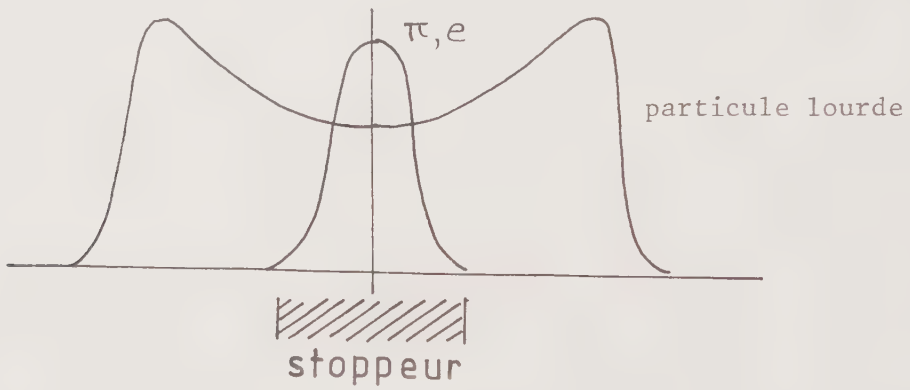
$$\tau = \frac{L}{V} - \frac{L}{v_\pi} = Lc\,\frac{M^2 - m_\pi^2}{2p^2}$$

Si $\lambda = \frac{c}{\nu}$ est la longueur d'onde associée à la fréquence d'oscillation des cavités, la différence de déphasage entre le pion et la particule de masse M sera :

$$\delta = 2\pi\nu\tau = \frac{\pi L}{\lambda}\,\frac{(M^2 - m_\pi^2)c^2}{p^2}$$

Si pour la particule lourde, la phase à l'entrée de la première cavité était φ , elle sera à l'entrée de la deuxième $\varphi + \pi + \delta$; il en résulte une déflection angulaire après les deux cavités $\theta = \theta_{max} [\cos \varphi + \cos(\varphi + \pi + \delta)]$ dont l'amplitude maximale, lorsque φ varie, est $2\,\theta_{max} \sin\left|\frac{\delta}{2}\right|$

La séparation est obtenue en intercalant un stoppeur de faisceau sur le trajet (non dévié) des pions. On arrêtera d'autant moins de particules lourdes que $\sin\left|\frac{\delta}{2}\right|$ sera plus grand, les meilleurs valeurs étant donc $\delta = (2k+1)\,\pi$ avec k entier positif ou nul.



On obtiendra donc ces valeurs de δ pour des impulsions p telles que

$$p^2 = \frac{L\,(M^2 - m_\pi^2)\,c^2}{(2k+1)\,\lambda}$$

Pour les antiprotons, avec les valeurs numériques L = 83 m, λ = 0,105 m, on obtiendra les impulsions suivantes :

k = 0	p = 26 GeV/c	
k = 1	p = 15.3 GeV/c	
k = 2	p = 11.8 GeV/c	etc ...

Dans la pratique, on s'arrête à k = 5 pour des raisons de stabilité de phase.

Pour les kaons, les valeurs optimales ne sont évidemment pas les mêmes. Il existe toutefois des impulsions pour lesquelles on a un bon enrichissement simultané en $\bar{p}$ et K^-, par exemple à 12 GeV/c.

La composition moyenne par bouffée du faisceau après séparation a été, pour cette expérience :

	e^-	π^-	K^-	$\bar{p}$
8 GeV/c	120 000	160 000	20 000	220 000
12 GeV/c	400 000		200 000	600 000

1.1.3. Identification du faisceau.

Elle est réalisée par deux compteurs Čerenkov à seuil, contenant un gaz sous pression variable (CO_2 ou N_2), réglée à chaque impulsion pour que l'un donne un signal pour les π^- seulement (éventuellement les e^-) et l'autre pour les π^- et les K^-.

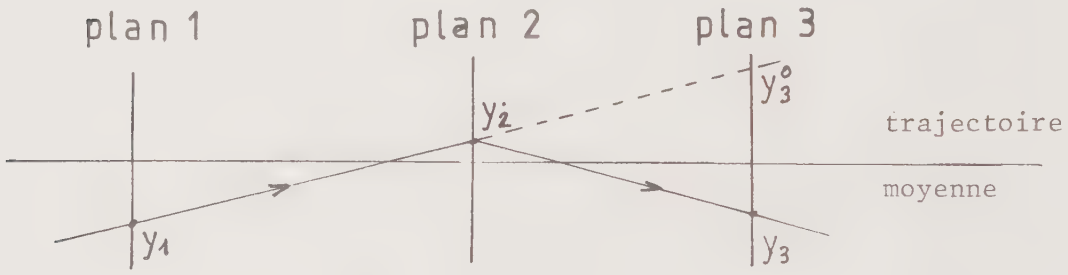
Pour les impulsions de 3 à 3.3 GeV/c, le faisceau ne contenait pratiquement pas de K^-, et le problème était plutôt d'éliminer les électrons, très nombreux ; les seuils étaient adaptés à la séparation $e^- \pi^-$ pour l'un des compteurs, et $\pi^- \bar{p}$ pour l'autre.

1.1.4. Spectromètre et chambres du faisceau.

1.1.4.1. Spectromètre.

Son but est de mesurer l'impulsion du faisceau avec une précision de l'ordre de 1°/₀₀ (c'est à dire 10 fois moins que la dispersion) en utilisant le pouvoir analyseur des aimants de la ligne.

Il est constitué de deux chambres à fils (écartement 1 mm) et d'un hodoscope (bandes de largeur 2 mm) situés sur la ligne de faisceau (fig. 1.1) en des points où l'étalement transversal est grand, séparés par des ensembles d'aimants dipolaires de déviation, et quadrupolaires de focalisation. Sur le schéma suivant nous n'avons représenté que ces trois plans de mesure et les écarts par rapport à une trajectoire moyenne (nominale). Nous avons supposé les aimants dipolaires concentrés en un seul point (plan 2) et négligé les effets quadrupolaires d'aberration.



Le principe de la mesure est le suivant : une trace ayant l'impulsion nominale p_o et coupant les plans 1 et 2 respectivement en y_1 et y_2 coupera le plan 3 en $y_3^o = \alpha y_1 + \beta y_2$. Si l'impulsion est p, l'écart $y_3 - y_3^o$ sera, en première approximation, proportionnel à l'écart relatif $\frac{\Delta p}{p_o} = \frac{p - p_o}{p_o}$ d'où :

$$y_3 \simeq \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma \frac{\Delta p}{p_o}$$

Une approximation meilleure consiste à écrire que le coefficient γ dépend aussi de y_1 , y_2 et Δp , donc que :

$$y_3 = \alpha y_1 + \beta y_2 + \frac{\Delta p}{p_o}\left(\gamma + \delta y_1 + \varepsilon y_2 + \zeta \frac{\Delta p}{p_o}\right)$$

Cette paramétrisation empirique permet, après ajustement des paramètres, d'écrire une expression approchée de $\frac{\Delta p}{p_o}$ connais-

sant y_1, y_2, y_3 :

$$\frac{\Delta p}{p_0} \simeq \frac{y_3 - \alpha y_1 - \beta y_2}{\gamma + \delta y_1 + \varepsilon y_2 + \frac{\zeta}{\gamma}(y_3 - \alpha y_1 - \beta y_2)}$$

Ce spectromètre ne fonctionnait pas au début de l'expérience, et son efficacité par la suite a été variable, et faible dans l'ensemble (on obtenait trois valeurs y_1, y_2, y_3 inambigües dans environ 30% des cas seulement).

1.1.4.2. Chambres de mesure.

Ce sont des chambres proportionnelles, de pas 1 mm, (désignées par B1, B2, B3 sur la fig. 1.1) destinées à déterminer la position et la direction du faisceau à l'entrée de la cible. Elles comportent chacune un plan de fils dans chaque direction (horizontale et verticale) ; le chambre B1 comporte en outre un deuxième plan de fils verticaux. On mesure ainsi l'angle et la position rapportés à une abscisse de référence, dans le plan horizontal et le plan vertical indépendamment, avec un bras de levier de l'ordre de 2 m. Les surfaces sensibles des chambres sont de 6 x 6 cm^2.

Nous reviendrons (en *2.2.5.1.*) sur le traitement détaillé des digitisations de ces chambres.

1.1.5. Données de calibration.

Pour chaque impulsion du faisceau, on a enregistré des traces obtenues en l'absence d'interaction. Elles servent à déterminer les caractéristiques géométriques du faisceau, et à calibrer l'alignement des chambres à étincelles par rapport aux chambres B1, B2, B3.

1.2. LE SPECTROMETRE OMEGA.

1.2.1. L'aimant

Il comporte deux bobines supraconductrices horizontales d'un diamètre moyen de 3 m, placées en position de Helmholtz de façon à produire un champ le plus uniforme possible dans le volume utile, qui est ici de 14 m^3. La hauteur disponible entre les bobines est de 1,5 m. Une culasse de fer assure à la fois le support mécanique de l'appareillage et le retour des lignes de champ magnétique.

Le champ maximum de 1,8 T (pour un courant de 4 800 A) a été utilisé à toutes les impulsions, sauf de 3 à 3.3 GeV/c où il a été réduit par un facteur $\frac{p}{5}$ (p étant l'impulsion en GeV/c)

Les trois composantes du champ ont été calculées, à partir de mesures, en tous les points d'une grille à maille parallépipédique ; les valeurs ainsi tabulées permettent le calcul du champ en un point quelconque du volume utile par interpolation tri-linéaire (par rapport aux trois coordonnées) à partir des huits sommets de la maille contenant ce point. Nous avons été amenés à utiliser au lieu de cette grille une paramétrisation que nous décrivons et discutons plus loin (2.1).

1.2.2. Les chambres à étincelles.

Leur configuration est indiquée sur la fig. 1.2. Elles sont réparties en deux groupes :

- La "géométrie I", en aval de la cible, comporte en principe 8 modules de 10 chambres chacun (dans cette expérience le dernier module était supprimé), à peu près perpendiculaires au faisceau, mais inclinés de façon à être explorés dans leur totalité par une des trois paires de caméras situées au-dessus de la culasse, à travers le trou central de la bobine supérieure.

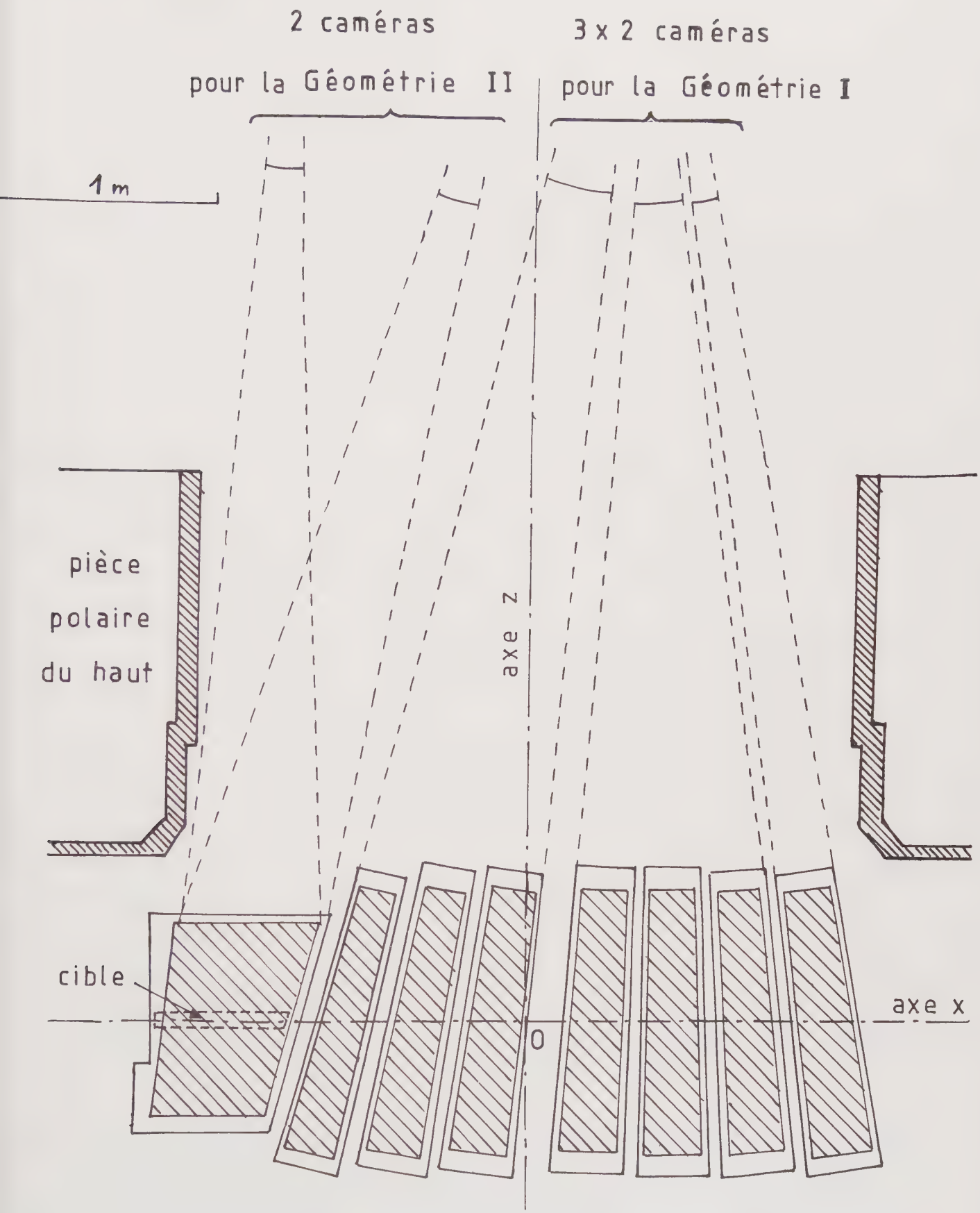

2 caméras
pour la Géométrie II
3 x 2 caméras
pour la Géométrie I
1 m
pièce
polaire
du haut
axe z
cible
axe x
O

FIG. 1.2

Les électrodes sont des feuilles d'aluminium de 25 μm d'épaisseur, de largeur 1,40 m et de hauteur 1,20 m, distantes de 10 mm. La matière traversée dans la direction du faisceau (y compris le gaz) représente environ 0,06 longueur de radiation, et 0,015 longueur d'absorption.

- La "géométrie II" (de part et d'autre de la cible) comprend 4 modules de chaque côté, avec chacun huit chambres, toutes vues par une quatrième paire de caméras.

  Les électrodes (parallèles au faisceau et à peu près verticales) sont plus minces (10 μm) qu'en géométrie I et collées sur une plaque de Rohacel de 2 mm d'épaisseur pour assurer la rigidité (pour éviter d'introduire trop de matière dans le volume utile, elles ne sont pas soutenues dans leur partie antérieure). Quatre modules représentent, dans une direction horizontale perpendiculaire au faisceau, environ 0,01 longueur de radiation et 0,004 longueur d'absorption.

L'ensemble des modules donne une acceptance géométrique presque totale, sauf en Géométrie II autour du plan vertical passant par l'axe de la cible. D'autre part, l'efficacité de production d'étincelles décroît quand l'incidence augmente et est pratiquement nulle au-delà de 60° : pour le type d'événements recherchés par notre expérience, cette inefficacité n'est gênante qu'en géométrie II. L'efficacité décroît aussi avec la multiplicité, ou lorsque deux étincelles sont trop proches (deux traces séparées de moins de 10 mm ne produisent le plus souvent qu'une étincelle, correspondant aléatoirement à l'une ou l'autre) ; ceci ne doit pas affecter les événements à deux traces, bien séparées dans l'espace.

Le temps de mémoire des chambres à étincelles est d'environ 1,2 μs ; les charges créées par le passage des particules sont balayées par une tension permanente de 250 V, dont le sens est alterné d'une chambre à l'autre : ce champ électrique, combiné au champ magnétique, donne lieu au phénomène de "staggering" (dérive alternée des étincelles) dont nous reparlerons en

2.2.5.2. Le temps mort après allumage est de 18 ms.

Pour éviter l'accumulation d'étincelles dans la zone traversée par le faisceau, et par conséquent une baisse d'efficacité dans les autres zones, des rondelles mobiles sont positionnées par des fils de suspension à l'intérieur de chaque chambre, élevant localement la tension de claquage au-dessus de la valeur appliquée en cas de déclenchement (12 kV).

1.2.3. Les caméras.

Elles sont situées à environ 5,5 m au-dessus du plan médian de l'aimant (cf. fig. 1.2), et leur écartement (144 cm pour les trois premières paires, 120 cm pour la quatrième) correspond à un angle stéréoscopique moyen de 15° pour la Géométrie I et 12,5° pour la Géométrie II.

Elles sont du type plumbicon, c'est à dire que l'image optique est formée sur une couche d'oxyde de plomb qui se charge par photoconductivité et est balayées sur l'autre face par un pinceau d'électrons, dont l'intensité est digitisée à intervalles réguliers : une ligne de balayage est ainsi subdivisée en 8192 points de mesure, ce qui correspond, dans l'espace réel au niveau du plan médian, à un point de mesure tous les 0,2 mm. En fait la précision réelle, mesurée par différentes méthodes concordantes, est de 0,4 mm. Compte tenu de l'angle stéréoscopique, un point dans l'espace reconstruit à partir de deux caméras aurait donc une incertitude horizontale de 0,56 mm et verticale de 2,1 mm, avec une corrélation faible entre ces deux coordonnées. Il s'y ajoute la fluctuation de position σ_F de l'étincelle elle-même dans le plan horizontal qui dépend de l'angle d'incidence θ_i par une formule du type $\sigma_F^2 = a^2 + b^2 \theta_i^4$ avec $a \simeq 0{,}2$ mm et $b \simeq 1{,}7$ mm (θ_i est en radians).

La résolution (distance minimale entre deux étincelles pour qu'elles soient séparées) est limitée par la largeur du pinceau d'électrons à 10 mm au niveau du plan médian. En principe, si deux étincelles sont séparées par une distance nettement plus grande, il y a au moins une des deux caméras qui les sépare : compte tenu de la faiblesse de l'angle stéréoscopique, cette inefficacité déborde celle que nous avons signalée en 1.2.2. à propos

des traces trop rapprochées ; elle reste cependant négligeable pour les événements intéressants de notre expérience.

A chaque prise de données, une caméra doit balayer une fois l'ensemble des chambres des modules orientés vers elle : le temps de lecture total est de 16 ms.

1.2.4. Les marques fiducielles.

Ce sont des barres horizontales situées juste au-dessus des modules optiques (81.65 cm au-dessus du plan médian), parallèlement à eux, de telle façon qu'elles soient vues par les caméras entre deux modules successifs. Chaque barre porte 12 marques (en Géométrie I) ou 8 (en Géométrie II) qui sont enregistrées systématiquement entre deux bouffées de faisceau, et servent à recalculer périodiquement les coefficients reliant les digitisations aux positions absolues des étincelles (en projection sur un plan horizontal), par l'intermédiaire de polynômes de degré 5.

Entre deux barres on procède par interpolation linéaire, ce qui peut donner lieu à des distorsions. Pour y remédier, on a mis au point un système de calibration par des fils droits, dont les images sont enregistrées de temps en temps, et qui permettent de corriger l'alignement dans la direction perpendiculaire aux chambres.

Ces enregistrements de fils droits, effectués avec différents éclairements, donnent aussi des corrections à l'effet dit de "slewing" qui fait que la position digitisée d'une étincelle dépend de son intensité lumineuse (repérée sur une échelle de 1 à 8).

L'ensemble de ces corrections est introduit dans le programme de reconstruction des événements.

1.2.5. Les chambres proportionnelles multifils.

Deux chambres sont intercalées dans le dispositif optique : une petite chambre de précision HPC1 juste après la cible, qui n'est pas touchée par les traces à grand angle, et une grande chambre à trois plans de fils (dite "de Beusch") après le 3ème module optique, dont nous nous servons hors ligne pour un premier filtrage des événements (cf 2.2.2.) et pour des contrôles sur certains lots d'événements (vérification que des traces dans les modules optiques sont bien en temps par rapport à l'événement).

1.3. DISPOSITIF DE DECLENCHEMENT.

1.3.1. Organisation d'ensemble.

Les événements recherchés étant fort rares (environ 1 interaction sur 10^7 à 12 GeV/c, donc 1 interaction pour 10^8 projectiles), l'intensité du faisceau a été portée à son maximum, et le temps moyen séparant deux interactions est beaucoup plus court que le temps nécessaire au déclenchement et au nettoyage des chambres à étincelles. On a donc cherché un déchenchement sélectif, basé sur le fait que pour les événements cherchés, les particules sortantes devaient être émises à grand angle et coplanaires, et qu'aucune particule neutre ne devait être produite : le taux de sélectivité global a été de l'ordre de 10^{-5} à 8 et 12 GeV/c.

A part le détecteur d'interaction, et les détecteurs de neutrons et de γ mis en veto, il existe deux dispositifs logiquement indépendants, quoique construits à partir du même appareillage : un pour les événements à deux traces chargées, que nous décrirons ici, et un autre pour les événements à deux neutres (le but initial de l'expérience), fonctionnant en parallèle et mutuellement exclusifs. Leur sélectivité étant élevée, le taux de déclenchement des chambres à étincelles est resté très inférieur aux limites dues aux temps morts et au temps d'écriture sur bande.

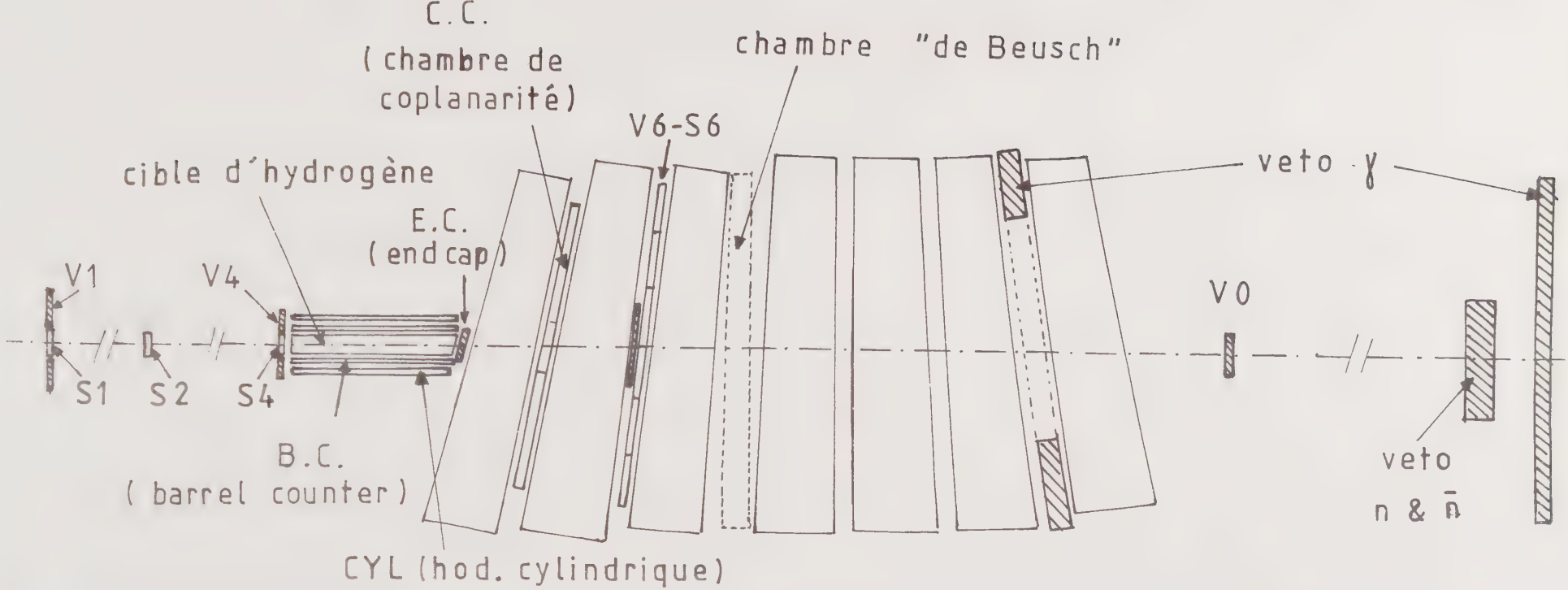

C.C.
(chambre de
coplanarité)
chambre "de Beusch"
V6-S6
cible d'hydrogène
E.C.
(end cap)
veto γ
V1
V4
V0
S1
S2
S4
B.C.
(barrel counter)
veto
n & n̄
CYL (hod. cylindrique)

FIG. 1.3

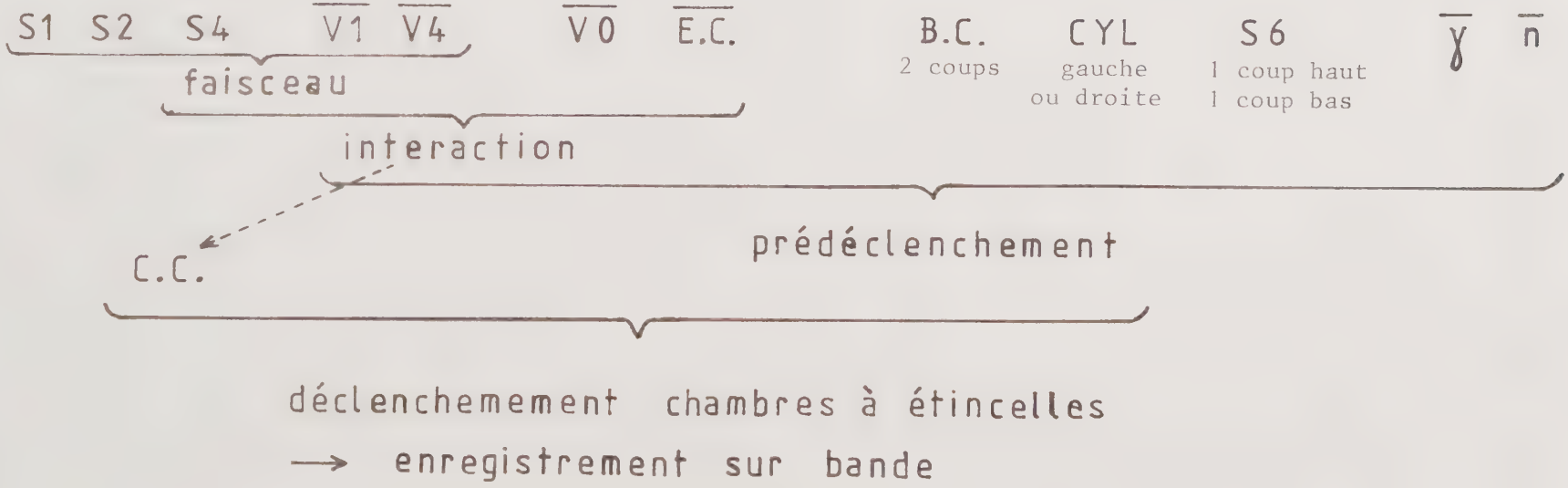

S1 S2 S4 V1 V4 V0 E.C.
B.C.
2 coups
CYL
gauche
ou droite
S6
1 coup haut
1 coup bas
γ n
faisceau
interaction
prédéclenchement
C.C.
déclenchemement chambres à étincelles
→ enregistrement sur bande

FIG. 1.4

La fig. 1.3. indique la position des différents éléments. La fig. 1.4 schématise le fonctionnement logique.

Pour diminuer la fréquence des temps morts dus aux éléments les moins rapides (en particulier la logique de la chambre de coplanarité), une structure hiérarchisée est établie :

- un détecteur d'interaction, à réponse très rapide, qui provoque la mise en oeuvre du prédéclenchement, ainsi que la lecture et le décodage de la chambre de coplanarité (C.C.), et le fonctionnement de la logique associée.

- Un dispositif de prédéclenchement rapide intégrant tous les éléments sauf la C.C. ; une réponse négative de sa part entraînant une remise à zéro générale, y compris de la C.C.

- Un déclenchement intégrant le prédéclenchement et la réponse de la C.C. Si l'ensemble est positif, les chambres à étincelles sont mises sous tension et l'événement est enregistré sur bande magnétique.

Pour éviter la superposition d'événements différents dans les chambres à étincelles, un système de protection passé-futur est mis en place : le déclenchement n'a pas lieu si l'interaction sélectionnée a été précédée ou suivie d'une autre interaction à moins de 1,2 μs.

Nous traiterons dans un paragraphe séparé (1.4.) de la chambre de coplanarité, conçue et réalisée spécialement pour cette expérience et qui joue un rôle décisif dans la sélectivité.

1.3.2. Le détecteur d'interaction.

Le passage d'une particule du faisceau est signalé par la coïncidence de trois scintillateurs en amont de la cible (S1, S2, S4) avec anti-

coïncidence de deux scintillateurs (V1 et V4) évidés en leur centre, pour rejeter les muons du halo. Le scintillateur S4 sert en particulier à délimiter précisément la section du faisceau à l'entrée dans la cible, pour que les particules comptées traversent à coup sûr l'hydrogène.

D'autre part, un scintillateur (Vo) situé à la sortie de l'aimant sur le chemin du faisceau, est mis en anticoïncidence pour signer l'interaction.

1.3.3. Les détecteurs de neutres.

Un ensemble de sandwiches scintillateur-plomb-scintillateur couvre un large angle solide autour de la cible, pour détecter essentiellement les γ issus des π^o : deux plaques sur les côtés de la Géométrie II ; une fenêtre intercalée après le sixième module optique ; et, loin en aval, un mur rectangulaire recouvrant l'angle solide laissé libre par la fenêtre. Une réponse positive (signal dans le scintillateur aval, mais pas dans le scintillateur amont) est mise en veto dans la logique de prédéclenchement.

En outre, pour rejeter plus efficacement les événements comportant un neutron ou un antineutron (émis en général vers l'avant dans le laboratoire), un détecteur formé de sandwiches multiples cuivre-scintillateur, d'une surface de 50 x 50 cm^2 est installé en aval des modules optiques.

1.3.4. Les compteurs de multiplicité.

Autour de la cible sont disposés :

- d'une part, un ensemble de 24 scintillateurs étroits formant un cylindre de même longueur que la cible, le "barrel counter" (B.C.), commun à de nombreux montages expérimentaux dans l'Oméga.

- D'autre part, autour du B.C., un scintillateur cylindrique en deux parties seulement (séparées par le plan médian vertical de la cible).Il est surtout utile pour couvrir les interstices laissés

libres par le B.C., et assurer ainsi une bonne réjection des événements avec traces chargées pour le déclenchement "deux neutres". Pour les interactions à deux corps chargés, cette accumulation de matière autour de la cible est plutôt un inconvénient, d'autant plus que ces scintillateurs sont souvent traversés très obliquement.

Pour le déclenchement "deux chargés", on exige l'une et l'autre des conditions suivantes :

- Deux scintillateurs (quelconques) touchés dans le B.C.
- Au moins une des deux moitiés du cylindre touchée.

D'autre part, un ensemble de 6 scintillateurs (S6) est disposé dans un plan séparant le deuxième et le troisième module de chambres optiques de la Géométrie I, formant un rectangle de 150 x 134 cm^2 partagé en bandes horizontales de largeur 25 cm, sauf pour les deux extrêmes : 17 cm ; le déclenchement exige qu'on ait au moins une des trois bandes supérieures et une des trois bandes inférieures touchées. Le S6 a aussi l'intérêt d'apporter une bonne résolution en temps (20 ns).

1.3.5. La condition de grand angle .

Pour des diffusions autour de 90° dans le référentiel du centre de masse, les traces sortantes ont une grande impulsion transverse et donc, dans le laboratoire, font un angle relativement grand avec la direction du faisceau. Deux scintillateurs circulaires sont donc mis en veto dans l'axe du faisceau :

- le "end cap" (E.C.) couvrant l'extrémité aval de la cible. Dans le câblage, ce compteur était en fait mis en veto dans le détecteur d'interaction pour réduire sa fréquence.
- Un scintillateur plus grand (V6), de taille variable avec l'impulsion du faisceau, situé à côté du S6.

Leur effet est d'éliminer tout événement ayant une trace chargée vers l'avant, et de faire décroître l'acceptance à 8 et 12 GeV/c lorsque l'angle de diffusion dans le centre de masse s'écarte de 90° (à 3 et 5 GeV/c, ce sont plutôt les dimensions extérieures du S6 et de la chambre de coplanarité qui limitent l'acceptance).

1.4. LA CHAMBRE DE COPLANARITE ET LA LOGIQUE ASSOCIEE.

1.4.1. Motivation.

Une étude préalable a montré que, pour des réactions à deux corps chargés, la déviation latérale d'une trace, due au champ magnétique, est à peu près proportionnelle à l'écart de cette trace par rapport à l'axe de la réaction : en effet plus une trace est rapide (donc moins déviée), plus elle est émise à petit angle dans le laboratoire. Il en résulte que si les deux charges sont opposées, les écarts à la coplanarité se compensent (du moins dans la gamme angulaire couverte par l'acceptance) : les impacts des deux traces sur un plan perpendiculaire à l'axe de la cible sont donc alignés avec cet axe (cf fig. 1.5). Cet alignement fournit un critère précieux pour la sélection de tels événements : d'où l'idée d'une chambre partagée en secteurs avec une corrélation entre secteurs diamétralement opposés.

1.4.2. Description de la chambre /7/.

C'est une chambre proportionnelle de surface utile 120 x 116 cm^2, du type "chambre à damiers" à lecture cathodique : le plan anodique, porté à haute tension, est formé de fils de tungstène doré de 20 μm de diamètre, espacés entre eux de 4 mm et situés à 5 mm du plan cathodique ; celui-ci est séparé en 57 secteurs angulaires (voir fig. 1.5) matérialisés sur une feuille de mylar par une peinture au graphite du côté des fils anodiques, et une peinture d'argent du côté opposé, reliée électriquement au graphite à travers le mylar. De chaque secteur, côté argent, part un fil qui aboutit à une chaîne d'amplification et de lecture. Un cercle central (traversé par le faisceau, mais non par les traces à grand angle) est porté à une haute

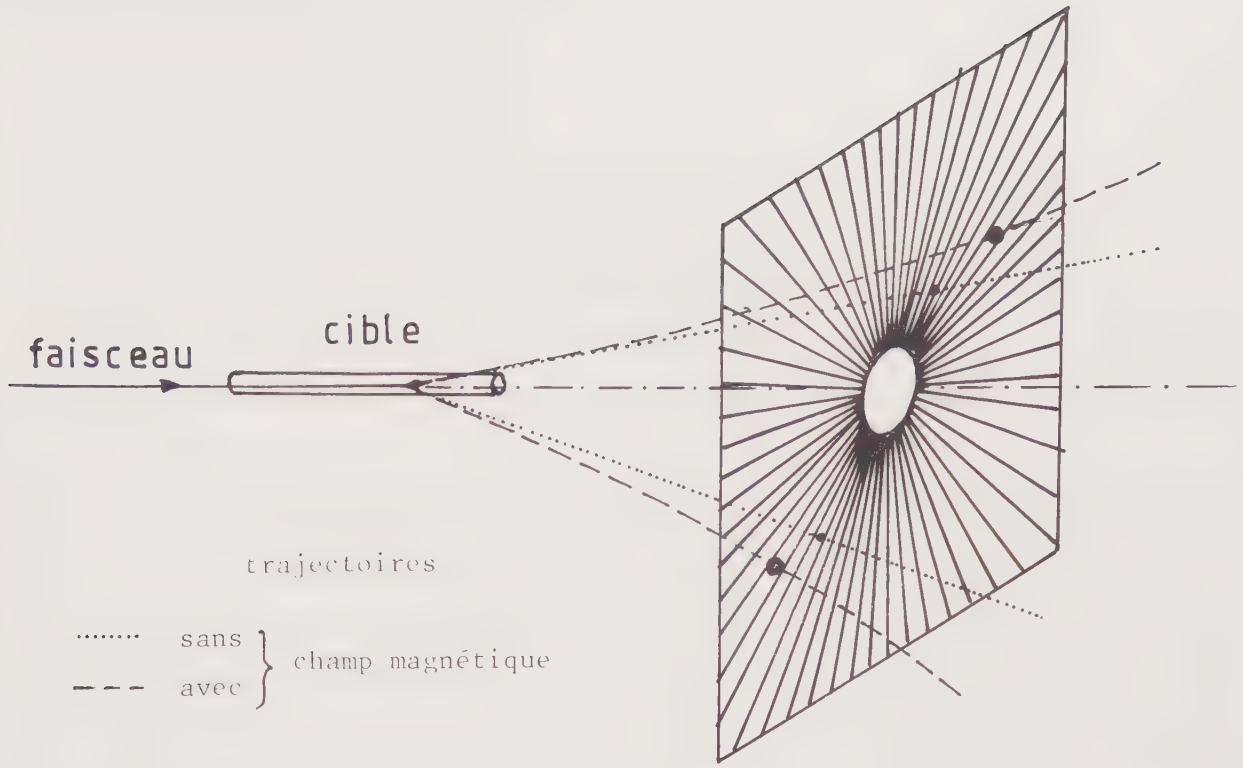

faisceau
cible
trajectoires
sans
avec
champ magnétique

FIG. 1.5

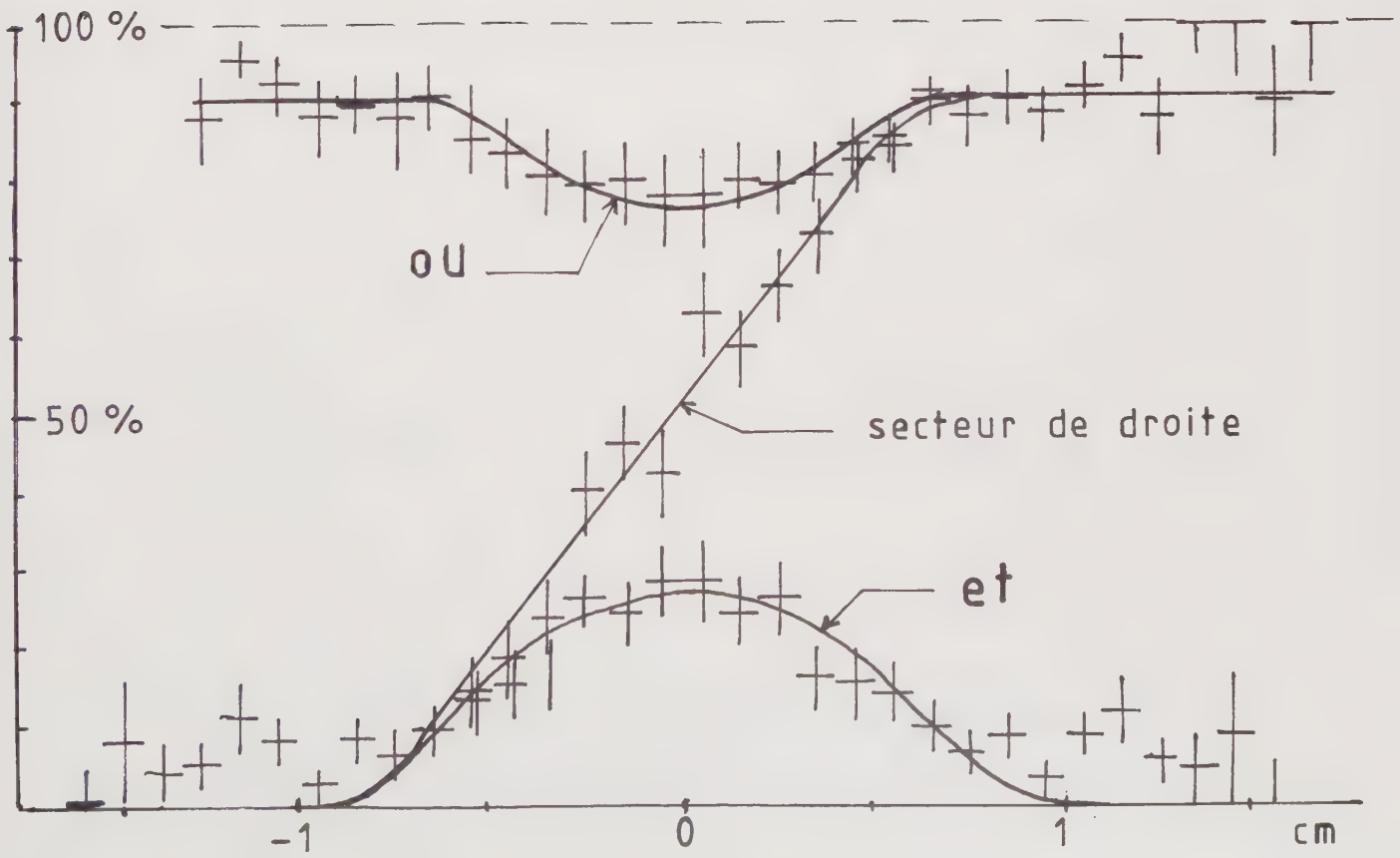

100 %
50 %
ou
et
secteur de droite
-1
0
1
cm

FIG. 1.6

tension positive d'environ 1000 V, ce qui le rend inefficace.

Le passage d'une particule déclenche une avalanche qui induit dans le secteur qui lui fait face une impulsion de charge électrique qui est détectée par la chaîne d'amplification.

La distance séparant deux secteurs voisins a été fixée à 1 mm après de nombreux essais pour assurer une bonne efficacité au passage d'un secteur à l'autre, sans entraîner un fort taux de diaphonie (c'est à dire des signaux créés par influence électrostatique mutuelle). La courbe de la fig. 1.6 illustre le résultat obtenu au cours de l'expérience. L'efficacité de la réunion de deux damiers voisins passe d'un plateau de 90% à un minimum de 80% au milieu de l'interstice, cependant que le taux de double comptage culmine à 25%. La zone d'influence mutuelle s'étend à environ 1 cm de part et d'autre de la frontière.

La logique associée à la chambre est conçue, nous le verrons, de façon à pallier les effets de ce recouvrement mutuel, alors que la perte d'efficacité n'est pas réparable.

1.4.3. La logique associée /8/

1.4.3.1. Configurations acceptables.

L'idée de base est d'établir une liste de configurations de secteurs touchés, recouvrant presque toutes celles engendrées par des événements à deux corps, mais assez restreinte pour être sélective par rapport au fond (événements à deux traces non coplanaires, ou plus de deux traces).

Si les secteurs sont numérotés de 0 à 56, leur nombre impair permet d'associer au secteur n, deux secteurs qui lui font face : n + 28 et n + 29 (modulo 57). On obtient ainsi la série de 57 configurations la plus courante, à deux secteurs touchés : (n, n + 28), ou d'une façon équivalente (n, n + 29). Nous avons vu

qu'il est fréquent que deux secteurs voisins (n, n + 1) soient touchés par une même trace : dans ce cas le plus probable est que le secteur n + 29 qui leur fait face soit le seul autre à être touché ; d'où la série de 57 configurations à 3 secteurs touchés : (n, n + 1, n + 29), elle aussi assez fréquente.

En pratique, la liste de configurations acceptables peut être remise à jour à tout moment ; le faible taux de déclenchement a amené à ajouter à celles déjà citées d'autres configurations, à 2 secteurs (n, n + 27), à 3 secteurs (n, n + 1, n + 28) et à 4 secteurs (n, n + 1, n + 28, n + 29) qui accroissent l'efficacité pour les événements à deux corps (déterminée par simulation préalable) sans trop augmenter le bruit de fond (déterminé préalablement à 10 GeV/c grâce à des événements réels de chambre à bulles). Par contre, on a enlevé des configurations situées dans le plan horizontal, trop contaminé par les paires e^+e^-.

1.4.3.2. La méthode de l'adressage dispersé.

Une fois établie la liste des configurations acceptables c_i (quelques centaines sur 2^{57} possibles à priori), le problème est de trouver une méthode rapide pour reconnaître si une configuration donnée est ou non sur la liste. Pour cela on utilise la technique de l'adressage dispersé ("hash coding"), qui consiste à condenser l'information des 57 secteurs en un nombre plus restreint d'unités élémentaires (bits), en l'occurence 10, par une fonction F de l'ensemble $\{0,1,2,\ldots,2^{57}-1\}$ dans l'ensemble $\{0,1,2,\ldots,1023\}$ rapidement calculable et telle que les $F(c_i)$ soient dispersés, c'est à dire si possible tous différents, ou à la rigueur le moins possible de $F(c_i)$ confondus pour des c_i différents (ambiguïtés).

La méthode est ensuite la suivante : on stocke dans une mémoire de 1024 mots de 64 bits les configurations acceptables c_i, chacune à l'adresse $F(c_i)$, et, en cas d'ambiguïté, une deuxième adresse (dite de chaînage) indiquant où se trouve une autre configu-

ration c_j telle que $F(c_j) = F(c_i)$, et ainsi de suite en cas d'ambiguïté multiple. Quand, en cours d'expérience, il faut examiner une configuration c, on calcule F (c) et on compare c à la configuration inscrite à l'adresse F(c) dans la mémoire (s'il y en a une) puis éventuellement, à celle des adresses de chaînage. On accepte c si on trouve une coïncidence.

1.4.3.3. La fonction d'adressage.

La fonction F est construite de la façon suivante :

- L'encodeur prioritaire (5 bits) calcule le numéro du premier secteur touché parmi les 32 premiers ou zéro si aucun de ces secteurs n'est touché.

- Les 57 bits sont regroupés en 19 groupes de 3 (n, n + 19, n + 38) dans lesquels on fait un "ou" logique : on obtient ainsi 19 bits notés (i), dont on tire deux parités modulo 3 (nous entendons par là la parité du nombre de bits égaux à 1 dans l'ensemble $\{(i), (i+3), (i+6), (i+9), \text{etc..}\}$)

$$P_{31} = (1) + (4) + (7) + (10) + (13) + (16) + (19)$$

$$P_{32} = (2) + (5) + (8) + (11) + (14) + (17)$$

et 4 parités modulo 4 :

$$P_{41} = (1) + (5) + (9) + (13) + (17)$$

$$P_{42} = (2) + (6) + (10) + (14) + (18)$$

$$P_{43} = (3) + (7) + (11) + (15) + (19)$$

$$P_{44} = (4) + (8) + (12) + (16)$$

On définit aussi 3 autres parités de sous-ensembles :

$$P' = (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) + (9) + (10)$$

$$P'' = (12) + (13) + (14) + (15) + (16) + (17)$$

$$P''' = (4) + (6) + (8) + (10) + (12)$$

- On garde le bit P_{31} tel quel, et on envoie les huit autres sur une PROM contenant 256 mémoires de 4 bits : à l'adresse formée par les huit bits on trouve les 4 bits qu'on utilisera pour la fonction F, conformément au tableau 1.1

En résumé, on obtient 10 bits par

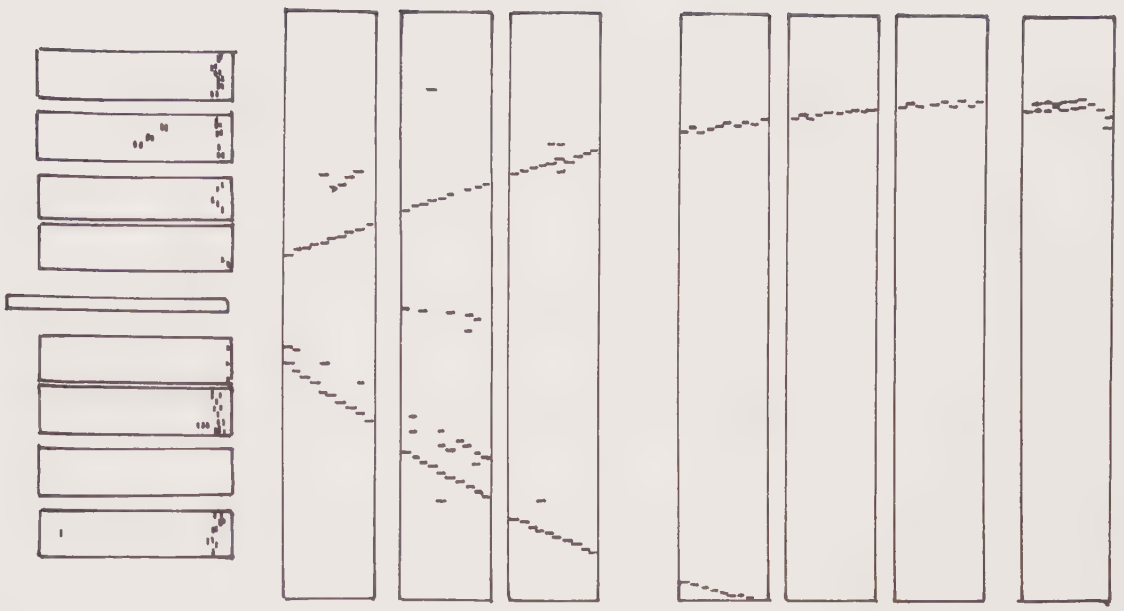
$$\underbrace{\text{encodeur prioritaire}}_{5 \text{ bits}} + \underbrace{P_{31}}_{1 \text{ bit}} + \underbrace{\text{sortie PROM}}_{4 \text{ bits}}$$

Cette fonction, déterminée empiriquement, ne donnait lieu qu'à 32 ambiguïtés (29 doubles et 3 triples). L'ensemble du calcul de F et de la comparaison prenait 100 ns en l'absence d'ambiguïté, plus 80 ns pour chaque étape du chaînage.

TABLEAU 1.1 — CONTENU DE LA PROM POUR LA FONCTION D'ADRESSAGE

mot de 8 bits ⟶ 4 derniers bits

4 premiers bits (entrée) ↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	8	2	0	3	4	1	2	3	4	1	5	0	8	6	7	8
1	10	9	10	11	11	12	13	14	15	0	1	2	3	3	5	6
2	10	7	12	8	0	6	9	10	5	4	11	12	10	12	13	13
3	14	0	15	0	1	2	7	3	8	4	5	6	7	7	8	9
4	4	5	7	14	9	10	1	11	4	4	6	12	0	13	11	2
5	3	1	14	15	0	15	1	14	2	3	4	1	5	6	7	8
6	12	6	15	9	8	7	0	1	14	7	0	2	11	6	9	3
7	9	13	8	2	10	11	14	12	0	13	8	4	14	15	0	1
8	13	3	3	5	2	10	12	2	4	3	15	4	5	6	5	7
9	13	10	8	9	10	11	12	2	12	13	0	5	6	6	14	15
10	14	11	3	10	5	9	9	8	0	9	6	1	2	3	4	12
11	4	8	7	5	6	6	2	5	14	7	1	3	3	3	8	9
12	2	10	8	6	11	7	0	12	3	7	13	14	2	7	1	1
13	13	8	11	13	15	0	0	6	1	3	1	2	4	4	3	4
14	9	1	5	13	5	10	6	2	11	3	7	8	0	9	15	10
15	10	7	5	11	0	1	1	9	0	12	9	7	2	13	14	15



Géométrie II

Géométrie I

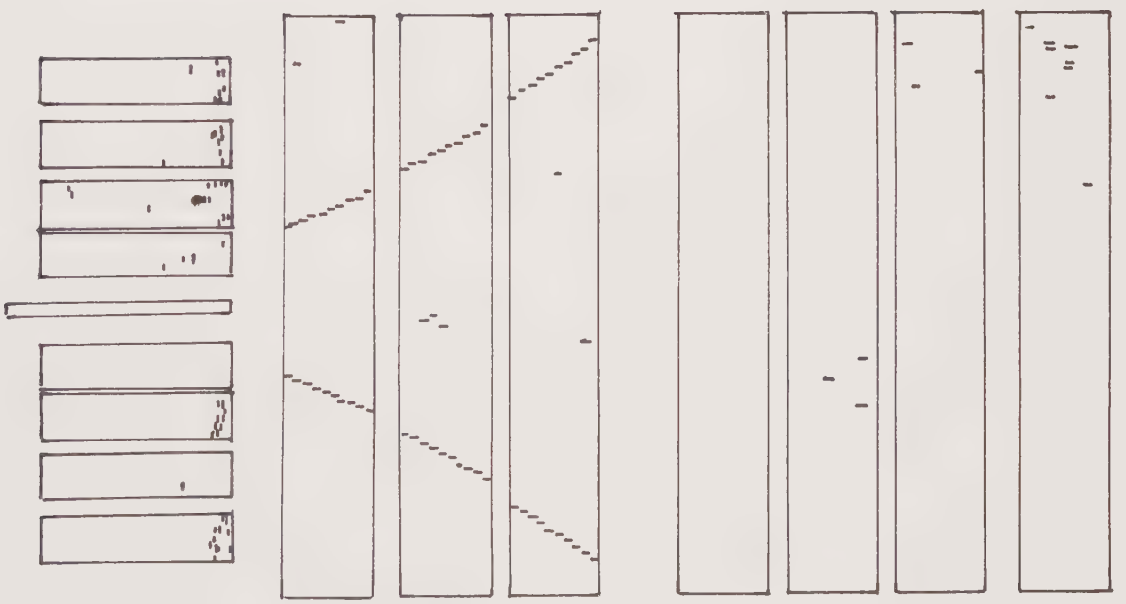


FIG 1.7

CHAPITRE 2

LA CHAINE DE TRAITEMENT DES EVENEMENTS

2.1. PARAMETRISATION DU CHAMP MAGNETIQUE.

2.1.1. Objectif et cadre.

2.1.2. La méthode des polynômes harmoniques.

2.1.3. Ajustements.

2.2. RECONSTRUCTION DES TRACES ET FILTRES.

2.2.1. Principe général.

2.2.2. Coupures sur les événements bruts.

2.2.3. Reconnaissance des traces.

2.2.4. Premier filtre cinématique.

2.2.5. Ajustement géométrique des traces.

2.2.5.1. Le faisceau incident.

2.2.5.2. Les traces sortantes

2.2.6. Deuxième filtre cinématique.

2.3. RECONSTRUCTION DES VERTEX.

2.3.1. Détermination géométrique.

2.3.2. Rejets.

2.3.3. Calcul des erreurs sur l'impulsion au vertex.

2.4. RECONSTRUCTION CINEMATIQUE.

2.4.1. Principe directeur.

2.4.2. Ajustement à trois contraintes.

2.4.3. Discrimination des hypothèses.

CHAPITRE 2

CHAINE DE TRAITEMENT DES EVENEMENTS.

2.1. PARAMETRISATION DU CHAMP MAGNETIQUE.

2.1.1. Objectif et cadre.

Le champ magnétique, nous l'avons vu, est vertical et à peu près uniforme au centre de l'aimant, mais il varie notablement près des limites du volume utile (il décroit en intensité et change de direction) : ainsi, à l'entrée de la cible, il n'est plus qu'aux 2/3 de son intensité au centre.

Le programme ROMEO, dans sa version standard, utilise une grille parallélépipédique pour le volume utile intérieur à l'aimant, comportant 21 x 11 x 10 = 2310 points avec un pas de 18 cm suivant la coordonnée x, 20 cm suivant y et 15 cm suivant z. Pour un point quelconque à l'intérieur de cette grille, le champ magnétique est calculé par interpolation tri-linéaire à partir des huit sommets du parallélépipède encadrant ce point, ce qui donne une erreur maximum de l'ordre de 2.10^{-3} T (1°/$_{oo}$), c'est à dire beaucoup moins que l'incertitude relative de mesure sur la courbure de la plupart des traces, avec toutefois des erreurs systématiques dues à la convexité des composantes du champ en fonction des coordonnées, qui reste souvent la même sur toute la longueur d'une trace.

Ce mode de calcul est rapide et précis, mais il exige de stocker en mémoire les 3 composantes du champ en plus de 2000 points, ce qui provoque un gros encombrement de la mémoire de l'ordinateur, ceci constituant un handicap pour l'exécution des programmes. Nous avons donc recherché une paramétrisation moins encombrante, quitte à perdre de la précision et du temps.

Une telle paramétrisation avait déjà été calculée /15/ à partir d'un développement sur des produits de fonctions trigonométriques, hyperboliques et de Bessel. Toutefois, le temps de calcul de telles fonctions est long, contrairement à celui de polynômes, même si ceux-ci comportent apparemment beaucoup plus de coefficients numériques. De toute façon, l'utilisation de sous-programmes standard ramène le calcul des fonctions à une série d'opérations arithmétiques élémentaires, poussée jusqu'à un point où la précision relative du résultat est comparable à celle des variables (telle qu'elle résulte de la taille de ces variables dans la mémoire). Même si ce degré de précision n'est pas atteint, le calcul est poussé plus loin que ne l'exigerait une détermination raisonnablement précise du champ magnétique.

Il apparaît donc qu'une paramétrisation polynômiale est a priori intéressante, car directement exprimable en termes d'opérations élémentaires : le gain de temps qui peut en résulter est appréciable, car dans la reconstruction des traces et des vertex, une grande partie du temps est consacrée à des calculs de champ magnétique. D'autre part on peut choisir, comme base de représentation des trois composantes, des triplets de polynômes ayant une parité donnée en x, y et z, et donc exploiter les symétries éventuelles pour diminuer le nombre de coefficients. Enfin, la contrainte apportée par les équations de Maxwell dans un milieu non magnétique permet, pour un degré fixé, de réduire considérablement le nombre de triplets de polynômes linéairement indépendants acceptables.

2.1.2. Méthode des polynômes harmoniques.

La façon la plus simple de trouver des composantes de champ vérifiant les équations de Maxwell $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ et $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ est de remarquer qu'elles dérivent d'un potentiel scalaire dont le laplacien est nul. Pour

trouver de telles composantes comme polynômes de degré n, il suffit donc de trouver les polynômes harmoniques de degré n + 1.

La condition de laplacien nul permet de calculer tous les coefficients d'un polynôme homogène de degré n + 1 comme combinaisons linéaires de ceux des monômes $x^{n-k+1} y^k$ (k variant de 0 à n + 1) et des monômes $x^{n-k} y^k z$ (k variant de 0 à n). Il y a donc 2n + 3 polynômes indépendants, et donc, si on considère tous les polynômes de degré inférieur ou égal à n + 1, (n + 1) (n + 3) polynômes harmoniques indépendants. Une façon de les écrire est donnée dans /16/ ; ces polynômes ont une parité déterminée dans chacune des trois coordonnées.

Chercher une représentation polynômiale de degré n revient donc à ajuster (n + 1) (n + 3) paramètres, (ou moins si des conditions de symétrie permettent de fixer la parité en x, y ou z) pour en déduire les $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$ coefficients des trois polynômes définissant les composantes du champ. Les équations de Maxwell font donc gagner un facteur $\frac{n+2}{2}$ dans le nombre de paramètres à ajuster. Ce gain est appréciable car un ajustement risque de perdre en fiabilité si le nombre de paramètres augmente trop.

2.1.3. Ajustements.

Nous avons utilisé un programme d'ajustement par moindres carrés sur les valeurs des composantes du champ en tous les points de la grille utilisée par ROMEO. Nous avons introduit successivement les polynômes harmoniques de degré croissant, en calculant à chaque fois le résidu quadratique moyen entre chaque composante du gradient du potentiel ainsi défini et la composante donnée dans la table de ROMEO. Pour chaque degré, nous avons supprimé les polynômes dont la contribution était inférieure à un certain seuil, en vérifiant que le résidu n'en était pas notablement affecté. Nous avons retenu en particulier deux ajustements :

Ecart entre la paramétrisation et les mesures

\- -50 à -100 gauss + +50 à +100

= -100 à -200 # +100 à +200

* supérieur à 200

FIG. 2.1

	Résidu (Gauss)			Nombre de monômes			
	B_x	B_y	B_z	B_x	B_y	B_z	Total
Degré 6 34 param.	205	115	220	47	44	57	148
Degré 8 50 param.	80	67	86	86	92	106	284

Le deuxième est tout à fait satisfaisant du point de vue de la précision, d'autant plus que les résidus ne sont grands que près des bords du volume utile, et que la précision dans la majeure partie de ce volume est de l'ordre de 1 à 2°/₀₀. Toutefois son utilisation, même optimisée par l'algorithme de Horner, implique un temps de calcul assez long (450 µs sur CDC 6600). Nous avons donc préféré le premier, que nous avons encore allégé en supprimantles monômes dont la contribution était la plus faible. Leur nombre a été ramené à 127 dans la version définitive, pour un temps de calcul de 160 µs seulement ; à titre de comparaison, le sous-programme utilisé de façon standard par ROMEO prend de 40 à 110 µs suivant qu'on reste dans une même case de la grille ou qu'on en sort dans une ou plusieurs directions.

Pour mieux évaluer l'imprécision de cette paramétrisation, nous avons cartographié sur la fig. 2.1 les écarts sur les différentes composantes : ils restent faibles dans la zone centrale, et ont un caractère oscillant dans l'espace (ainsi qu'on l'attend d'un ajustement polynomial), donc leur effet est partiellement compensé pour des traces longues (pour lesquelles la précision de mesure est la meilleure).

Nous avons procédé à des vérifications sur un lot de traces pris au hasard : l'écart entre les impulsions calculées d'après le champ paramétrisé et celles obtenues par la méthode standard (interpolation) reste presque toujours très inférieur à l'incertitude de mesure. Ensuite nous avons sélectionné un lot d'événements élastiques : nous n'avons trouvé aucune différen-

ce notable dans la dispersion de quantités manquantes suivant que le champ était paramétrisé ou interpolé. On peut en conclure que cette paramétrisation s'avère suffisamment précise pour cette expérience.

2.2. RECONSTRUCTION DES TRACES ET FILTRES.

2.2.1. Principe général.

Nous avons utilisé le programme ROMEO, écrit spécifiquement pour la reconstruction des événements de l'Omega, et qui comporte deux grandes parties : reconnaissance des traces et reconstruction géométrique ; nous l'avons modifié pour optimiser la reconstruction d'événements à deux traces chargées, en renonçant à mettre en évidence toute autre topologie.

Des filtres sont intercalés à différents niveaux pour éliminer la majeure partie du fond : toutefois les coupures sont faites avec des marges de sécurité suffisantes pour qu'on puisse négliger les pertes d'événements intéressants ; ces marges ont été déterminées à partir d'événements simulés et confrontées à un lot d'événements réels sélectionnés sur des critères purement cinématiques.

D'autre part, toutes les associations possibles de deux traces de signe opposé sont examinées pour la reconstruction du vertex. Les seules pertes d'événements à la reconstruction sont donc imputables à l'inefficacité de ROMEO pour la reconstruction des traces (traces courtes essentiellement).

Nous présentons les différentes étapes dans l'odre chronologique. Le tableau 2.1 donne pour chaque impulsion le nombre d'événements enregistrés et le pourcentage d'événements rejetés à chaque étape.

2.2.2. Coupures sur les événements bruts.

Il existe parfois un désaccord entre la condition de déclenchement (2 chargés ou 2 neutres) déterminée par la logique rapide, et le contenu de l'enregistrement sur bande concernant les réponses des détecteurs impliqués : dans ces conditions on garde comme candidat "2 chargés" tout événement qui n'est pas, sans ambiguïté en ligne et hors ligne, un "2 neutres". Les coupures qui suivront suffiront à éliminer les événements correspondant dans la réalité au déclenchement "deux neutres".

D'autre part, dans environ 5% des cas, la structure de l'enregistrement n'est pas conforme au modèle imposé, certains éléments étant absents ou tronqués ; ceci peut provoquer un traitement aberrant des données enregistrées, ou un blocage du programme de reconstruction. Tous ces événements sont rejetés.

On applique ensuite un filtre à partir des digitisations en y et z de la chambre à fils dite "de Beusch", utilisant le fait que, pour les événements intéressants, les impacts (y_1, z_1) et (y_2, z_2) des deux traces dans un plan vertical sont séparés par une distance supérieure à un minimum. Compte tenu de la dispersion horizontale due au champ magnétique, cette condition est un peu modifiée sous la forme :

$$\left(\frac{y_1 - y_2}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{z_1 - z_2}{\Delta z}\right)^2 \geqslant 1$$

où Δy et Δz sont fonction de l'impulsion incidente.

Cette coupure n'est appliquée que s'il existe exactement deux digitisations (ou groupe de digitisations adjacentes) dans le plan y et deux dans le plan z, abstraction faite d'un intervalle encadrant l'impact d'un faisceau.

2.2.3. Reconnaissance des traces.

Au cours d'examens visuels systématiques, il est apparu que des traces ayant formé des étincelles à la fois en Géométrie I et en Géométrie II sont parfois considérées par ROMEO comme deux traces distinctes ; ou bien, après ajustement géométrique, les résidus varient brutalement quand on passe de la G II à la G I, montrant un mauvais raccordement des deux portions d'une même trace. Une calibration précise de la G II par rapport à la G I s'avère délicate : les traces allant de l'une à l'autre ont une incidence défavorable dans l'une des deux, et en général un petit nombre de points en G II, dans une région étroite autour de la cible.

D'autre part les modules de la G II sont souvent encombrés par un bruit de fond important (dû en partie au fait qu'elle est peu touchée par les particules produites dans la cible : l'absence d'ionisation bien localisée favorise des décharges parasites). Il en résulte que ROMEO perd du temps à reconstruire des pseudo-traces (d'ailleurs faciles à éliminer par la suite) et qu'il est parfois géné pour attribuer correctement leurs étincelles aux vraies traces.

Dans la mesure où toutes les traces qui nous intéressent doivent traverser au moins le début de la G I si les conditions de déclenchement sont satisfaites, nous avons choisi d'ignorer complètement la G II : la précision supplémentaire qu'elle devrait apporter en principe ne s'est pas concrétisée ici. Les données de la G II sont par contre indispensables pour une reconstruction efficace des événements à 2 V° /9/.

Nous avons éliminé aussi les traces qui ne sont pas visibles au moins dans l'un des deux premiers modules de la G I : ce sont, soit des traces parasites, soit des portions de traces coupées en deux par une interaction secondaire, ou par une inefficacité de ROMEO.

De façon standard, ROMEO reconnaît et élimine les traces parasites (anciennes) correspondant à la trajectoire du faisceau.

A la fin nous rejetons les événements n'ayant pas au moins deux traces ayant satisfait aux conditions précédentes.

2.2.4. Premier filtre cinématique.

A ce niveau nous disposons pour chaque trace de deux "vues" stéréoscopiques, qui peuvent provenir chacune de plusieurs caméras ; cependant celles-ci sont très proches l'une de l'autre, et on peut considérer qu'elles réalisent une projection oblique de la trace sur un plan horizontal : en effet les digitisations brutes (projection sur le plan oblique de la caméra) sont transformées en coordonnées projetées sur un plan de référence horizontal par les coefficients dont nous avons parlé en 1.2.4.

L'angle stéréoscopique est faible, et les traces qui nous intéressent ne font jamais un très grand angle avec le plan horizontal (elles doivent avoir touché le scintillateur S6) : la courbure apparente de ses deux projections fournit une information quantitative assez précise sur l'impulsion d'une trace.

Nous avons fait des comparaisons, sur un lot de traces diverses, entre l'impulsion "vraie" (calculée par l'ajustement géométrique subséquent) et le rayon de courbure moyen des projections, calculé comme suit : sur chaque vue on ajuste un cercle sur les points correspondant aux intervalles pairs d'une part, impairs d'autre part (pour s'abstraire du phénomène de "staggering" évoqué en 1.2.2.), s'ils sont assez nombreux, puis on fait la moyenne arithmétique des différents rayons (4 en général). On constate qu'en supposant un champ magnétique de 1,8 T, l'impulsion apparente calculée à partir de ce rayon moyen est peu différente de l'impulsion vraie (voir fig. 2.2).

Les événements sont donc filtrés en exigeant qu'il existe au moins une paire de traces (de signes opposés) ayant chacune un rayon projeté moyen supérieur à une certaine limite r_m (calculée d'après la limite inférieure de l'impulsion imposée par l'acceptance), et que la somme de ces rayons soit supérieure à une autre limite R_m. Ces limites dépendent évidemment

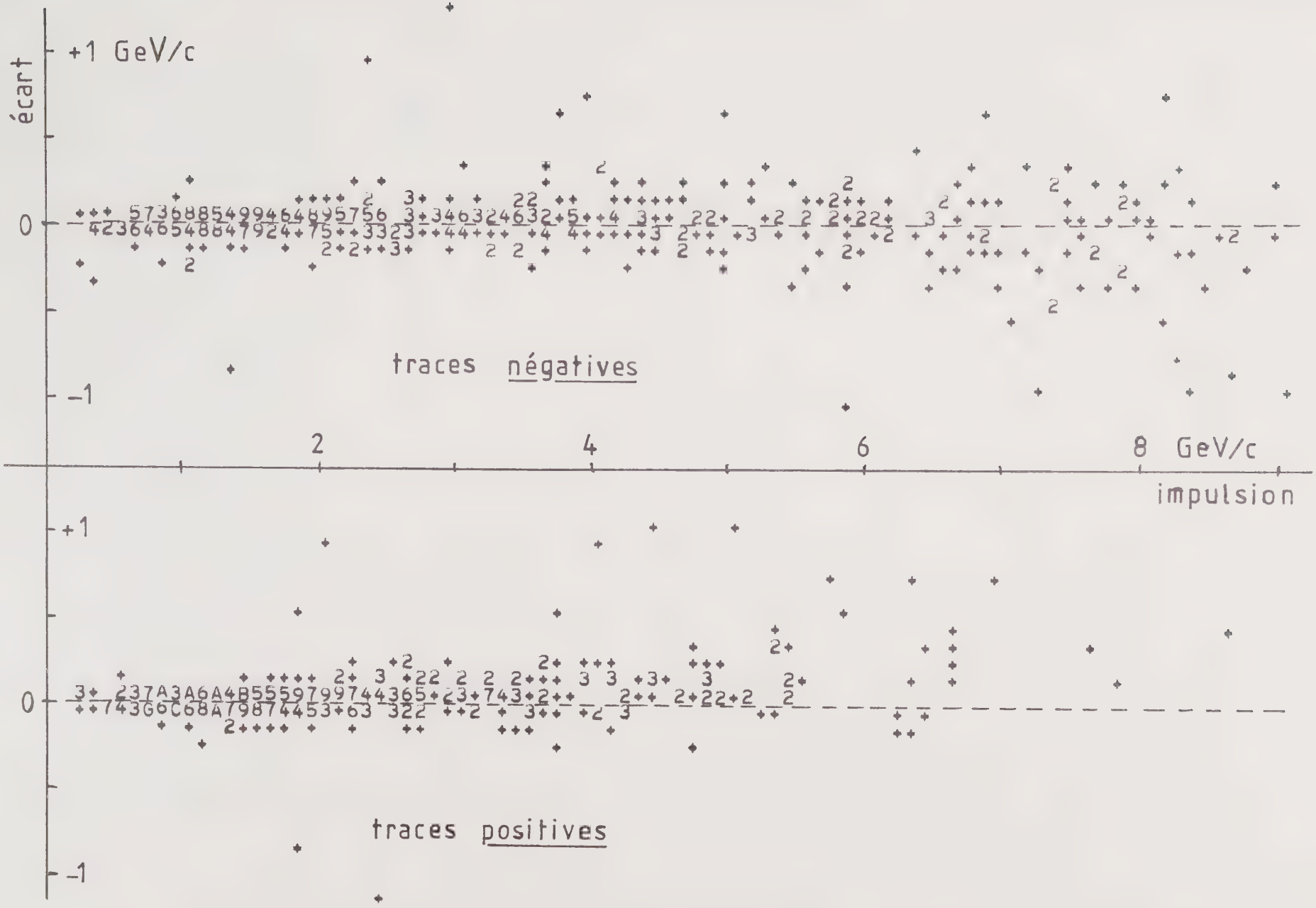

écart
+1 GeV/c
0
−1
traces négatives
2
4
6
8 GeV/c
impulsion
+1
0
−1
traces positives

FIG. 2.2

de l'impulsion incidente. Elles sont les suivantes (avec l'impulsion équivalente en GeV/c) :

Imp (GeV/c)	3 à 3.3	5	8	12
r_m (cm)	180	120	200	300
imp. corresp.	0.58	0.65	1.08	1.62
R_m (cm)	800	700	1000	1500
imp. corresp.	2.59	3.78	5.40	8.10

2.2.5. Ajustement géométrique des traces.

2.2.5.1. Le faisceau incident.

Nous avons vu en 1.1.4.1. comment le spectromètre peut mesurer l'écart relatif par rapport à l'impulsion nominale. Dans le cas (fréquent) où il ne fournit pas de réponse, ou une réponse ambigüe, on attribue au faisceau l'impulsion nominale p_o , et une incertitude (de l'ordre de 1%) calculée à partir de la distribution d'impulsion mesurée dans les modules optiques : pour chaque impulsion nominale on a en effet enregistré pendant une courte période des traces faisceau sans interaction à des fins de calibration.

La position et la direction du faisceau à l'entrée de la cible (plus précisément à $x_o = -175$ cm dans le référentiel lié au centre de l'aimant) sont calculées à partir des chambres B1, B2, B3 (cf. 1.1.4.2.). Le faisceau étant peu étalé, et peu dispersé en impulsion, l'effet du champ de fuite entre les chambres et x_o peut se ramener à une translation unique dans chaque plan de fils, avec une erreur inférieure à 0,1 mm : en choisissant convenablement l'origine dans chaque plan, on peut donc obtenir des alignements dans les plans xy, d'une part, xz, d'autre part, qui fournissent directement

la position et la direction en x_o , avec une précision limitée seulement par l'écartement des fils (1 mm).

Pour fixer complètement les contraintes de translation définissant dans chaque plan l'origine par rapport à la position du premier fil, on utilise l'extrapolation vers l'amont des traces du faisceau vues dans les modules optiques (la trajectoire est suivie avec sa courbure jusqu'à x_o , puis l'extrapolation est rectiligne au-delà).

Une fois ces constantes définies, on procède pour chaque faisceau incident à l'ajustement d'une droite sur les coordonnées y translatées pour définir la position y_o et l'angle φ_o en x_o , ainsi que leur matrice de covariance. La même méthode s'applique aux coordonnées z pour définir la position z_o et l'angle λ_o en x_o .

Pour le calcul des erreurs, on attribue une incertitude de 1 mm à chaque digitisation : cette valeur peut paraître très surestimée par rapport à l'incertitude théorique, mais la dispersion observée dans l'extrapolation à partir des modules optiques, dans la calibration est nettement supérieure à sa valeur théorique, ce qui s'explique en partie par la matière traversée. D'autre part les mesures des coordonnées dans les chambres sont discrètes, donc corrélées d'une chambre à l'autre. Nous discuterons plus loin plus en détail le calcul des matrices d'erreurs.

En cas d'ambiguïté sur un des plans, on choisit la digitisation la plus proche de l'alignement obtenu avec les plans inambigus (s'il y en a au moins deux). Si on n'a pas, pour une coordonnée (y ou z) au moins deux plans inambigus, on attribue au couple (y_o, φ_o) ou (z_o, λ_o), suivant les cas, les valeurs nominales déduites de la calibration. On rejette aussi l'ajustement en y si l'on n'a de points inambigus que dans les deux plans de B1, distants seulement de 2 cm.

Dans tous les cas on impose à ROMEO de prendre en compte la particule du faisceau pour la suite des opérations.

2.2.5.2. *Les traces sortantes*.

A partir des couples de projections, obtenues par les caméras, ROMEO reconstruit les étincelles comme points dans l'espace, puis, si possible, regroupe les points adjacents deux par deux pour compenser les effets de "staggering" (dérive des étincelles alternée d'une chambre à la suivante, sous l'effet combiné du champ magnétique et du champ électrique de balayage). S'il obtient plus de huit paires pour une trace, il ne garde que les points ainsi appariés et calcule un point dans l'espace à partir de chaque paire. S'il obtient moins de huit paires, il ajuste une hélice sur les points d'ordre pair, et une sur les postes d'ordre impair, et de leur écartement il déduit la correction nécessaire. S'il n'a pas assez de points d'une certaine parité pour ajuster une hélice, il utilise des corrections données au départ, qu'il réajuste périodiquement à partir des points qui ont pu être appariés.

Il effectue ensuite un ajustement par moindres carrés des trajectoires d'après la carte de champ magnétique, avec la méthode du "quintic spline fit" /17/ : il obtient ainsi cinq paramètres définissant la trace en un point d'abscisse x_1 fixée (celle du premier point mesuré) : les coordonnées y_1 et z_1, les angles φ_1 et λ_1 par rapport au référentiel de l'Omega, et l'inverse de l'impulsion 1/p. Il calcule aussi leur matrice de covariance en affectant dans un premier temps à chaque mesure élémentaire (une étincelle dans une caméra) l'incertitude définie plus haut (1.2.3.) et en en déduisant une matrice de poids à chacun des points reconstruits /18/. Puis il normalise cette matrice pour chaque trace à partir des résidus en imposant que le χ^2 soit égal au nombre de degrés de liberté : nous avons recopié cette matrice sur la bande de sortie écrite par

ROMEO en vue d'une utilisation dans la propagation des erreurs (2.3.1. et 2.3.3.) et dans un ajustement de vertex ultérieur (chap. 3).

ROMEO peut aussi chercher à associer à chaque trace une digitisation des plans de fils qu'elle traverse (dans notre cas seule la chambre "de Beusch" est concernée) sans pour autant, en général, faire intervenir cette information dans l'ajustement. Nous y avons ajouté une association avec un secteur touché de la chambre de coplanarité : ceci nous fournit un critère pour déterminer si cette trace est "en temps" (donc appartient à l'événement qui a déclenché les modules optiques) puisque la mémoire des chambres proportionnelles est beaucoup plus courte que celle des chambres à étincelles.

Sauf inefficacité de la chambre, toute trace ayant traversé sa surface sensible doit pouvoir être associée à une digitisation ; pour la chambre de coplanarité, l'association doit toujours exister puisque cette chambre conditionne le déclenchement. En fait la transcription sur bande de la configuration des fils et secteurs touchés n'est pas toujours parfaitement fiable, et nous n'avons pas utilisé ce critère d'association pour rejeter des traces, mais seulement pour vérifier le bon fonctionnement et le bon positionnement du dispositif, et comme possibilité d'éclaircir des cas douteux.

2.2.6. Deuxième filtre cinématique.

Ce filtre s'intercale en partie avant l'ajustement géométrique de ROMEO, et en partie après pour des raisons techniques liées à la structure du programme (il traite les traces l'une après l'autre, et ne garde pas simultanément en mémoire les points dans l'espace de toutes les traces).

Une hélice circulaire est ajustée sur les points reconstruits dans l'espace. Les paramètres de cette hélice et son intersection avec l'axe de la cible fournissent une première approximation des composantes de l'impulsion au vertex ; cette information est plus complète et plus précise que celle obtenue dans le premier filtre cinématique.

On rejette alors les traces ayant une impulsion transverse inférieure à une limite P_{tm}.

Une fois les traces traitées, on rejette les événements n'ayant pas au moins une paire de traces de signes opposés, avec une impulsion longitudinale totale supérieure à P_{lm}.

Le tableau suivant donne les valeurs de P_{tm} et P_{lm} aux différentes impulsions : l'approximation hélicoïdale étant assez précise, ce filtre est plus strict que le premier.

Impulsion faisceau	3	5	8	12
P_{tm}	.5	.6	.7	1.1
P_{lm}	2.5	4.	6.	9.

(GeV/c)

2.3. RECONSTRUCTION DU VERTEX.

2.3.1. Détermination géométrique /19/

Le temps de mémoire des chambres à étincelles étant assez long, il arrive, malgré la protection passé-futur (cf.1.3.1.), que des traces antérieures ou postérieures à l'événement intéressant subsistent. D'autre part certaines traces sont coupées par ROMEO en deux portions (ce qui peut être dû à une diffusion réelle de la particule sur la matière des détecteurs, ou à une inefficacité du programme de reconnaissance lui-même). Malgré les filtres successifs, on se retrouve donc parfois avec plus de deux traces a priori acceptables.

Toutes les intersections de paires de traces de signe opposé sont d'abord déterminées par une approximation circulaire en projection horizontale, et rejetées si elles sont en dehors de la cible, ou si la distance verticale entre les deux traces à l'aplomb de l'intersection est trop grande. On admet qu'il y a intersection si les deux cercles, non sécants, s'approchent à une distance suffisamment petite (en l'occurence 10 cm).

Pour chaque intersection retenue, on applique la procédure itérative de ROMEO pour l'ajustement de vertex (ss-programme EXPOL /20/), à l'ensemble formé par les deux traces sortantes et la trace du faisceau : une itération, dans EXPOL, consiste essentiellement à extrapoler chaque trace jusqu'au point où elle s'approche le plus du vertex déterminé par l'itération précédente, puis, en assimilant la trace à sa tangente en ce point, à chercher le point qui minimise la somme des carrés des distances à ces traces, pondérées par des "erreurs perpendiculaires" c'est à dire des erreurs sur des coordonnées orthogonales dans le plan perpendiculaire à la trace. L'extrapolation utilise l'algorithme de Runge-Kutta dans le sous-programme RKUTAS /21/.

Quand l'itération a convergé, on convient, pour définir les paramètres d'une trace au vertex (ceux qui seront utilisés pour l'analyse cinématique), de les calculer au point, sur la trace extrapolée, la plus proche du vertex ainsi déterminé.

Pour traiter plus correctement les traces à grand angle, nous avons modifié le calcul des erreurs perpendiculaires en considérant les coordonnées orthogonales à la trace (Y' Z') comme définies "à X' constant", X' étant la coordonnée colinéaire à la trace dans le référentiel X' Y' Z'. En outre, nous avons introduit la covariance de Y' et Z' dans le calcul des distances pondérées.

Nous avons choisi comme changement de référentiel :

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\lambda\cos\Phi & \cos\lambda\sin\Phi & \sin\lambda \\ \sin\Phi & -\cos\Phi & 0 \\ \sin\lambda\cos\Phi & \sin\lambda\sin\Phi & -\cos\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Φ et λ étant les angles qui définissent la direction de la trace au point considéré.

La matrice d'erreur définie en $x = x_1$ (1er point mesuré) est d'abord extrapolée jusqu'en $x = X$ (point le plus proche du vertex) suivant la méthode paramétrique développée dans l'annexe 1 (A 1.3) qui repose sur une approximation hélicoïdale, dont la validité sera discutée plus complètement en 3.2.1.

Elle est ensuite "tournée" (cf A 1.2), c'est à dire exprimée dans les variables Y', Z' à X' constant, au lieu de Y, Z à X constant. Il est important de remarquer que cette transformation n'est pas le changement de variables écrit plus haut (XYZ) $\longrightarrow$ (X' Y' Z'). Dans le cas particulier qui nous intéresse, l'impulsion est colinéaire à X', et la formule trouvée en (A 1.2) montre que la transformation cherchée se réduit alors à la restriction à Y, Z et Y', Z' de ce changement de variables, donc sa matrice peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\Phi & 0 \\ \sin\lambda\sin\Phi & -\cos\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Ce qui donne la matrice de covariance de Y' et Z' sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^t \end{bmatrix}$$

D'où

$$\sigma_{y'y'} = \cos^2\Phi \quad \sigma_{yy}$$

$$\sigma_{y'z'} = -\sin\lambda\cos\phi\sin\phi \quad \sigma_{yy} + \cos\lambda\cos\phi \quad \sigma_{yz}$$

$$\sigma_{z'z'} = \sin^2\lambda\sin^2\Phi \quad \sigma_{yy} + \cos^2\lambda \quad \sigma_{zz} - 2\sin\phi\cos\lambda\sin\lambda \quad \sigma_{yz}$$

Ce traitement se ramène à celui du sous-programme EXPOL standard pour des traces faiblement courbées et peu inclinées sur l'axe x. En pratique nous avons constaté peu de différence entre les résultats des deux méthodes.

2.3.2. Rejets.

Certains vertex sont rejetés par la procédure d'ajustement, soit parce que l'itération ne converge pas, soit parce que la probabilité associée au χ^2 est trop faible. Dans ce dernier cas il s'agit en général d'événements où la trace du faisceau a été mal mesurée (par exemple une digitisation parasite a été prise à la place d'une manquante). Ces événements ont été gardés sur la bande de sortie en vue d'un essai ultérieur de récupération de vertex (cf. 3.4.2.).

Une dernière coupure a été effectuée après ajustement du vertex, sur les trois composantes de l'impulsion manquante, ainsi que sur la coplanarité et sur l'angle entre les deux traces sortantes dans le référentiel du laboratoire : pour une diffusion élastique, cet angle passe par un minimum lorsque l'angle de diffusion dans le référentiel du centre de masse est voisin de 90°, et ce minimum est déjà plus grand que pour la plupart des événements du fond.

Le tableau 2.1 indique l'incidence de ces coupures suivant l'impulsion.

2.3.3. Calcul des erreurs sur l'impulsion au vertex.

Il s'agit de déterminer, à partir de la matrice d'erreurs (5 x 5) de la trace au premier point mesuré, une matrice (3 x 3) sur les paramètres définissant l'impulsion au vertex, c'est à dire 1/p, λ , Φ d'après le choix de ROMEO.

Ce n'est pas une extrapolation analogue à celle que nous avons rencontrée en 2.3.1. puisque la condition "au vertex" n'équivaut pas à la condition "à x = X fixé". D'après le point de vue de EXPOL, "au vertex" signifie "au point le plus proche du vertex ajusté". Ce point dépend à la fois des paramètres de la trace et des coordonnées du vertex, qui dépendent elles-mêmes des paramètres de toutes les traces. Un traitement rigoureux devrait donc tenir compte de toutes ces dépendances pour fournir la matrice d'erreurs sur (1/p, λ , Φ).

Nous n'avons pas essayé de le faire, d'une part pour éviter un allongement des calculs, d'autre part parce que le problème sera résolu de lui-même par l'ajustement global de vertex décrit au chapitre 3, pour lequel les traces sont par définition exactement coucourantes. Nous avons plutôt considéré les coordonnées X, Y, Z comme des constantes et utilisé la même paramétrisation hélicoïdale qu'en 2.3.1. (Ce traitement serait correct pour un vertex défini par de nombreuses traces, aucune n'ayant un poids prédominant par rapport aux autres).

Les paramètres 1/p, λ , Φ "au vertex" étant ainsi définis, le calcul de leurs dérivées par rapport aux paramètres y, z , 1/p, λ_1 , φ_1 à x constant au premier point mesuré est traité dans l'annexe 1 (A 1.4). On trouve :

(S = signe de la trace ; R = rayon de courbure)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = - \frac{\cos^2 \lambda \sin \Phi}{SR}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} = - \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{SR}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (1/p)} = p\left(\cos^2\lambda \sin\Delta\varphi + \sin^2\lambda . \Delta\varphi\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \sin\lambda \cos\lambda \left(\sin\Delta\varphi - \Delta\varphi\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} = \cos^2\lambda \cos\Delta\varphi + \sin^2\lambda$$

avec $\Delta\varphi = \Phi - \varphi_1$

Les dérivées de 1/p et λ sont nulles dans l'approximation hélicoïdale.

2.4. RECONSTRUCTION CINEMATIQUE.

2.4.1. Principe directeur.

Puisque nous ne cherchons à étudier que certains canaux à deux corps, il est inutile de recourir, comme le font les programmes cinématiques généraux, à un ajustement pour chaque hypothèse possible ; nous ne nous intéressons ici qu'aux hypothèses à 4 contraintes, les autres constituant un fond qu'il faut éliminer le mieux possible par des coupures, ou à défaut évaluer globalement pour soustraire sa contribution ; essayer d'y distinguer des réactions à 1 contrainte (par exemple avec un neutron manquant) serait de faible utilité, car les distributions en masse manquante sont assez larges, et comparer des probabilités d'hypothèses qui n'ont pas les mêmes contraintes est hasardeux.

Nous effectuons donc sur tous les vertex un ajustement à 3 contraintes (conservation de l'impulsion) et nous nous servons de la conservation de l'énergie pour sélectionner les événements élastiques (ainsi que $\bar{p}\,p \longrightarrow K^-K^+$ ou $\pi^-\pi^+$) : nous définissons une variable δm^2 qui réalise très bien cette sélection. La probabilité de l'ajustement n'intervient que comme critère subsidiaire.

Les impulsions ne sont pas corrigées pour tenir compte de la perte d'énergie dans la matière traversée : celle-ci est nettement inférieure à l'incertitude de mesure.

2.4.2. Ajustement à 3 contraintes.

C'est un ajustement par moindres carrés, du type non-paramétrique avec contraintes (cf annexe 2) ; si l'on choisit les variables $P_x\ P_y\ P_z$ les contraintes de conservation de l'impulsion sont linéaires et très simples à écrire. En désignant respectivement par σ_o, σ_1 et σ_2 les matrices (3 x 3) de covariance au vertex des traces : faisceau, sortante positive et sortante négative, on obtient (sans itération) les impulsions ajustées $\vec{P}_i^{aj}$ à partir des impulsions brutes $\vec{P}_i$ et de l'impulsion manquante $\vec{P}^m = \vec{P}_o - \vec{P}_1 - \vec{P}_2$ par les équations matricielles

$$P_i^{aj} = P_i + \varepsilon_i\, \sigma_i \left(\sigma_o + \sigma_1 + \sigma_2\right)^{-1} P^m$$

avec $\varepsilon_i = -1$ pour le faisceau et + 1 pour les autres.

A partir de ces quantités, on peut calculer la variable δm^2 définie de la façon suivante : si m_1 est la masse du projectile, m_2 celle de la particule cible, l'énergie est conservée avec les impulsions $\vec{P}_i^{aj}$, en attribuant à la particule sortante négative la masse carrée $m_1^2 + \delta m^2$ et à la positive $m_2^2 + \delta m^2$.

En posant $$E_{lab} = \sqrt{m_1^2 + \left(\vec{P}_o^{aj}\right)^2} + m_2$$

$$E_1 = \sqrt{m_1^2 + \left(\vec{P}_1^{aj}\right)^2}$$

$$E_2 = \sqrt{m_2^2 + \left(\vec{P}_2^{aj}\right)^2}$$

Cette condition s'écrit :

$$E_{lab} = \sqrt{E_1^2 + \delta m^2} + \sqrt{E_2^2 + \delta m^2}$$

Ce qui donne :

$$\delta m^2 = \frac{1}{4}\left[E_{lab}^2 - 2\left(E_1^2 + E_2^2\right) + \frac{\left(E_1^2 - E_2^2\right)^2}{E_{lab}^2} \right]$$

2.4.3. Discrimination des hypothèses.

Les événements élastiques sont caractérisés par $\delta m^2 \simeq 0$, et les événements $\bar{p}p \to X^- X^+$ par $\delta m^2 \simeq m_X^2 - m_p^2$. La distribution en δm^2 permet donc de sélectionner simultanément les 3 réactions

$$\bar{p}p \to \bar{p}p \ , \ K^-K^+ \ et \ \pi^-\pi^+$$

En outre, la variable δm^2 a le gros avantage de distinguer nettement les événements à 2 corps du fond, qui s'étend presque entièrement dans le domaine $\delta m^2 > 0$. D'ailleurs δm^2 est étroitement corrélé aux angles θ_1 , θ_2 des particules sortantes par rapport au faisceau (dans le référentiel du laboratoire), qui nous l'avons vu, fourniraient à eux seuls un excellent critère de sélection : la bonne résolution de cette expérience résulte autant de la mesure précise des angles que de celle des impulsions.

On voit sur la fig. 2.3 la distribution en δm^2 à 8 et 12 GeV/c, pour une probabilité de l'ajustement 3c supérieure puis inférieure à 0,01.

Les pics élastiques apparaissent clairement ; ils ont une forme dissymétrique (plus étalée vers la droite que vers la gauche) et leur centre est décalé vers la droite. Pour les réactions à deux mésons, la situation est moins claire : les événements correspondants sont peu nombreux et leur distribution assez étalée. Si l'on admet que le décalage vers la droite observé sur les pics élastiques s'applique aussi à ces réactions, ces événements doivent presque tous correspondre à $\bar{p}p \to \pi^-\pi^+$.

Nous reprendrons cette discussion à la fin du chapitre 3, après amélioration de la précision sur la reconstruction des traces : la variable δm^2 aura alors une meilleure résolution.

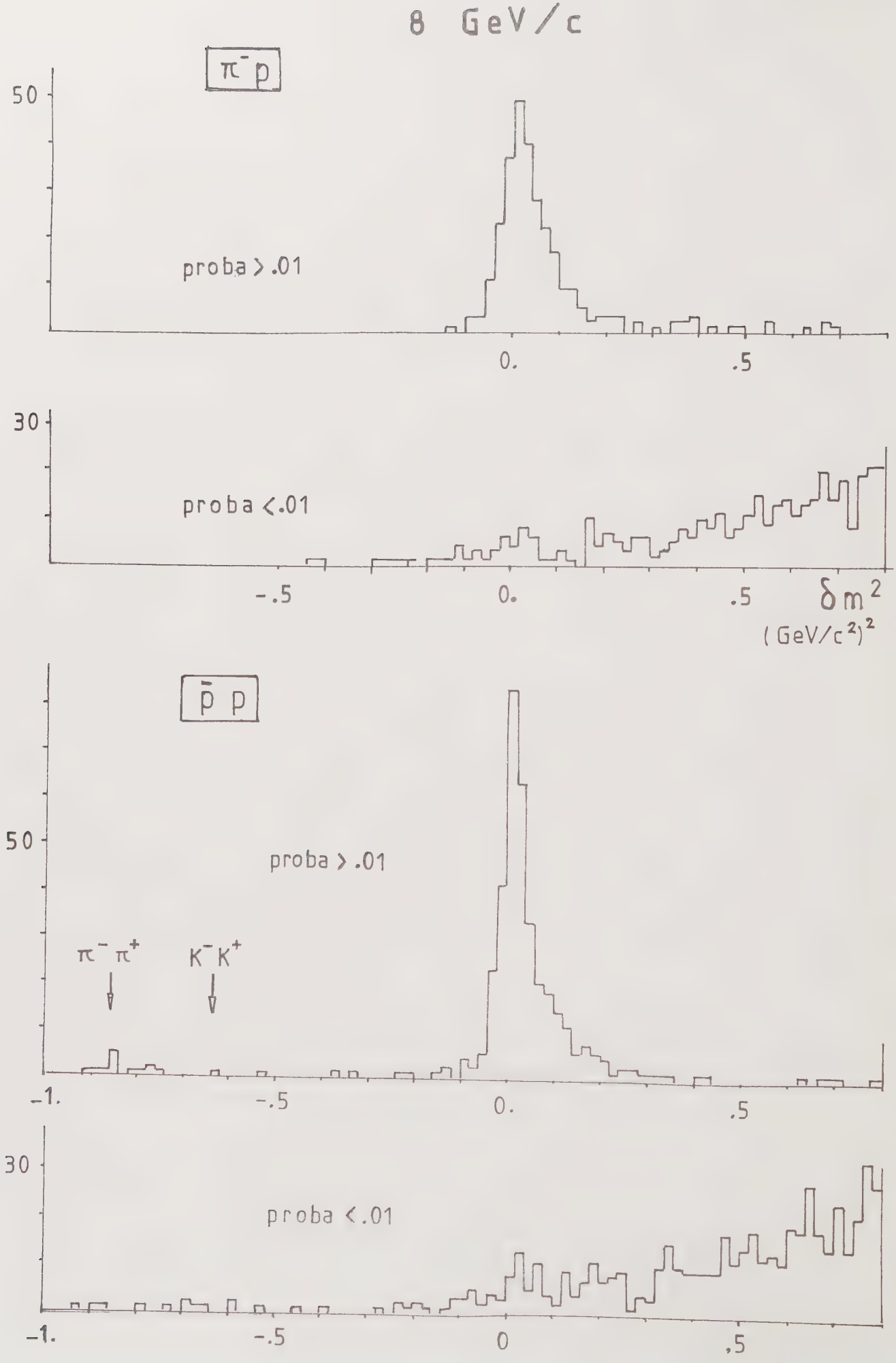

8 GeV/c
π⁻p
50
proba > .01
0.
.5
30
proba < .01
-.5
0.
.5
δm²
(GeV/c²)²
p̄ p
50
proba > .01
π⁻ π⁺
K⁻ K⁺
-1.
-.5
0.
.5
30
proba < .01
-1.
-.5
0
.5

FIG. 2.3

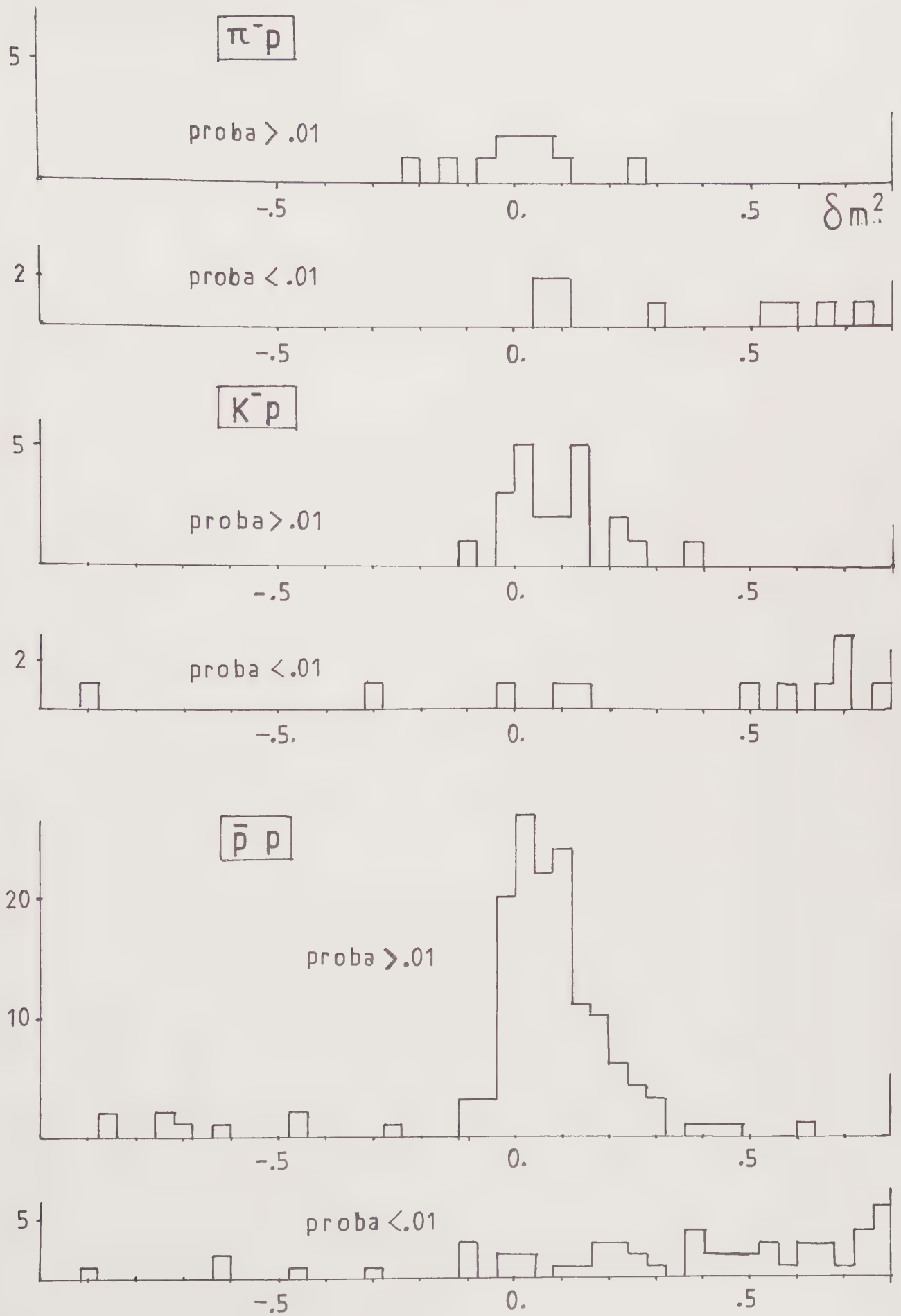

12 GeV/c
π⁻p
proba > .01
5
-.5
0.
.5
δm²
proba < .01
2
-.5
0.
.5
K⁻p
proba > .01
5
-.5
0.
.5
proba < .01
2
-.5.
0.
.5
p̄ p
proba > .01
20
10
-.5
0.
.5
proba < .01
5
-.5
0.
.5

FIG. 2.3

TABLEAU 2.1.

INCIDENCE DES FILTRES ET COUPURES

Impulsion	3 GeV/c		5 GeV/c		8 GeV/c		12 GeV/c	
Nombre d'événements 2 charg. sur bande	199 500		45 200		327 000		390 500	
	Eliminés	Restent	Eliminés	Restent	Eliminés	Restent	Eliminés	Restent
Filtre Beusch (cf. 2.2.2)	10.2	89.8	8.7	91.3	16.3	83.7	11.5	88.5
Coupures après reconnaissance des traces (cf. 2.2.3)	2.2	87.7	1.3	90.1	1.9	81.8	2.5	86.0
1er filtre cinémat. (cf. 2.2.4)	33.9	53.8	28.8	61.3	45.2	36.6	65.7	20.3
2ème filtre cinémat. (cf. 2.2.6)	26.0	27.8	43.2	18.1	27.0	9.6	19.3	1.0
Vertex rejetés (cf.2.3.2 et 3.4.2)	14.1	13.7	15.7	2.4	8.9	0.7	0.88	0.12

(proportions en % du total des événements sur bande)

CHAPITRE 3

AJUSTEMENT GLOBAL DU VERTEX

3.1. PRINCIPE ET INTERET DE LA METHODE.

3.2. ALGORITHMES.

- 3.2.1. Propagation de la matrice d'erreurs.
- 3.2.2. Ajustement du vertex.
  - 3.2.2.1. Méthode itérative des moindres carrés
  - 3.2.2.2. Paramétrisation du second degré
  - 3.2.2.3. Calcul des dérivées partielles

3.3. MATRICES D'ERREURS, BIAIS ET AUTOCALIBRATION.

- 3.3.1. Critique du calcul des matrices d'erreurs des traces.
- 3.3.2. Réajustement des matrices d'erreurs.
- 3.3.3. Calibration mutuelle des traces.

3.4. UTILISATION POUR LA CINEMATIQUE.

- 3.4.1. Algorithme.
- 3.4.2. Récupération des vertex perdus par ROMEO.
- 3.4.3. Résultats.

CHAPITRE 3

AJUSTEMENT GLOBAL DU VERTEX.

3.1. PRINCIPE ET INTERET DE LA METHODE.

La reconstruction géométrique des traces à partir des points mesurés dans l'espace (ou de leurs projections) fournit, pour chacune d'entre elles indépendamment des autres, une estimation des cinq paramètres définissant cette trace, et la matrice de covariance de ces paramètres. Ici, ces paramètres sont les coordonnées y et z et les angles φ et λ pour une valeur fixée de l'abscisse x (celle du premier point mesuré) et le module p de l'impulsion (ou son inverse) supposée constante le long de la trajectoire. Pour autant que les erreurs de mesure sont gaussiennes, ou du moins que le grand nombre des points mesurés permet de les considérer comme telles, ces cinq paramètres et leur matrice de covariance contiennent toute l'information disponible sur la trace à ce niveau.

Le but de l'ajustement global du vertex est d'enrichir l'information sur chacune des traces qui en sont issues, en tenant compte du fait qu'elles sont coucourantes, et en particulier de mieux déterminer ses paramètres au vertex que par une simple extrapolation individuelle. Dans la pratique, on peut en attendre un bénéfice surtout pour des traces qui ont été mesurées sur une distance courte par rapport à la distance d'extrapolation au vertex, ou en un petit nombre de points : on leur fournit un "bras de levier" important, avec un point supplémentaire déterminé avec précision par les autres traces.

Ceci correspond à la configuration de la plupart des événements qui nous intéressent : ils comportent une trace vers l'avant, bien mesurée (en général la négative) et une trace latérale, proche des limites de l'acceptance, et vue souvent dans deux ou trois modules optiques seulement.

Aucune contrainte cinématique n'intervient dans la méthode : elle pourrait être généralisée à des événements de toutes topologies, avec neutres manquants ou non, ainsi qu'aux vertex secondaires (en particulier aux V°).

D'un point de vue mathématique, il s'agit d'un ajustement paramétrique par moindres carrés (cf annexe 2) dont les variables sont les paramètres des n traces associées au vertex (soit 5n variables) et dont les paramètres sont les trois coordonnées du vertex et trois paramètres par trace, donc au total 3n + 3 paramètres, et 2n - 3 degrés de liberté (c'est à dire 3 dans cette expérience, où les vertex ont trois traces).

Le problème technique à résoudre pour effectuer cet ajustement consiste à déterminer d'une façon utilisable (c'est à dire avec une précision raisonnable dans un temps de calcul minimal) les dérivées partielles des variables par rapport aux paramètres : en d'autres termes, il s'agit de définir une méthode rapide d'extrapolation des traces dans un champ magnétique, facilement différentiable. Le champ n'étant pas uniforme dans la région de la cible, une extrapolation géométrique précise ne peut être simplement hélicoïdale, et on doit utiliser un algorithme plus élaboré. Le calcul des dérivées avec un tel algorithme est long, surtout si on doit utiliser la méthode des différences finies.

On peut simplifier le problème en remarquant que la propagation de la matrice d'erreurs n'a pas besoin d'être aussi précise que celle de la trace elle-même ; et qu'une extrapolation à courte distance peut se faire à partir d'une expression analytique simple. Nous avons donc décomposé l'ajustement en deux étapes :

- Une extrapolation précise des traces jusqu'en un point voisin du vertex : un tel point est fourni par ROMEO s'il a déjà reconstruit un vertex avec les mêmes traces ; sinon les intersections de cercles en projection horizontale donnent une distance d'extrapolation suffisamment précise pour notre propos. Les matrices d'erreurs, quant à elles, sont propagées d'une manière approximative par un calcul analytique basé sur une paramétrisation hélicoïdale.

- un ajustement ne comportant que des extrapolations à courte distance, pour lequel on utilise une paramétrisation du 2ème degré en fonction de l'abscisse, qui ne tient compte que du champ magnétique local.

Ces algorithmes sont développés en 3.2.

Notons que cet ajustement (comme tout ajustement de vertex) fournit des critères :

- pour calibrer une trace par rapport aux autres (ici, par exemple, celle du faisceau) : on cherche à annuler en moyenne tous les résidus.
- pour calibrer les erreurs de mesure : on cherche à normaliser les distributions des écarts.

Il a, en revanche, un inconvénient potentiel : une distorsion géométrique portant sur une seule trace entraîne un biais sur l'ensemble des paramètres ; dans l'ajustement standard, par contre, le biais ne se reflète que sur la position du vertex, et par voie de conséquence, sur l'angle φ des autres traces au vertex, tandis que l'angle λ en est très peu affecté, et le module de l'impulsion p pas du tout.

Nous discuterons ces questions en 3.3.

3.2. ALGORITHMES :

3.2.1. Propagation de la matrice d'erreurs.

Il s'agit simplement d'un changement de paramètres : on passe des q_i $(i = 1 \text{ à } 5)$ à $x = x_o$ fixé, aux r_j $(j = 1 \text{ à } 5)$ à $x = X$ fixé. Si on désigne par σ la matrice d'erreurs (c'est à dire de covariance) des q_i, celle des r_j s'écrit

$$\rho_{jl} = \sum_{i,k} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \frac{\partial r_l}{\partial q_k} \sigma_{ik}$$

La matrice des dérivées est régulière : l'information contenue dans les r_j est identique à celle contenue dans les q_i .

Pour abréger le calcul des dérivées partielles, on adopte une paramétrisation hélicoïdale, en supposant que le champ magnétique est constant et vertical (parallèle à l'axe z) et en lui donnant une valeur $\bar{B}$ égale à celle qu'il prend au milieu du segment qui joint le premier point de la trace et le point extrapolé.

En désignant par R le rayon de courbure calculé à partir de $\bar{B}$, S le signe de la charge, (x_1, y_1, z_1) le premier point mesuré, (X, Y, Z) le point extrapolé, φ_1 et Φ l'angle azimuthal respectif en ces deux points et $\Delta\varphi = \Phi - \varphi_1$, on trouve les dérivées suivantes (cf annexe 1, A1.3.).

$$\frac{\partial Y}{\partial y_1} = \frac{\partial Z}{\partial z_1} = 1 \qquad \frac{\partial Y}{\partial z_1} = \frac{\partial Z}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial (1/p)} = p\,S\,R\,\frac{1-\cos\Delta\varphi}{\cos\Phi} \;;\; \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{p}\,\frac{\partial Y}{\partial (1/p)}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi_1} = S\,R\,\frac{\sin\Delta\varphi}{\cos\Phi}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial (1/p)} = p\,\operatorname{tg}\lambda\left[\frac{X-x_1}{\cos\Phi} - S\,R\,\Delta\varphi\right]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = S\,R\,\Delta\varphi + \operatorname{tg}^2\lambda\,\frac{X-x_1}{\cos\Phi}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi_1} = S\,R\,\operatorname{tg}\lambda\left[\frac{\cos\varphi_1}{\cos\Phi} - 1\right]$$

Les quantités p et λ étant constantes, il n'est pas nécessaire de calculer leurs dérivées.

La zone d'extrapolation se situe autour de la cible, c'est à dire dans une région où le champ magnétique varie sensiblement (à l'entrée de la cible, il n'a plus que 2/3 de sa valeur au centre) : l'approximation hélicoïdale doit donc être discutée. Elle est acceptable si la variation de probabilité qui en résulte, pour un point, dans l'espace des r_j , situé à une distance de quelques écarts-type , est négligeable. Il suffit pour cela que la variation relative des ρ_{jl} le soit elle-même. Comme les matrices d'erreurs sont assez mal définies (cf. 3.3.1.), cette condition peut être interprétée de façon large ; les variations qu'on observe sur les éléments de matrice, suivant qu'on les calcule par une extrapolation précise ou par l'approximation hélicoïdale, sont au plus de l'ordre de 10%, et donc tout à fait tolérables.

3.2.2. Ajustement du vertex.

3.2.2.1. Méthode itérative des moindres carrés.

En désignant par ξ_{ij}^{mes} l'ensemble des cinq quantités qui résument les mesures effectuées sur la $i^{ème}$ trace (c'est à dire les paramètres Y, Z, 1/p, λ , Φ définis par l'extrapolation) par ρ_i leur matrice de covariance, et par π_ℓ l'ensemble des paramètres à ajuster (coordonnées du vertex et composantes de l'impulsion des traces au vertex), on cherche à minimiser le χ^2 défini par :

$$\chi^2 = \sum_i \sum_{j,k} \left(\rho_i^{-1}\right)_{jk} \left[\xi_{ij}^{mes} - \xi_{ij}(\pi_\ell)\right] \left[\xi_{ik}^{mes} - \xi_{ik}(\pi_\ell)\right]$$

La dépendance des ξ_{ij} par rapport aux π_ℓ sera précisée ultérieurement.

La méthode générale est justifiée et exposée dans l'annexe 2 : nous allons la détailler dans ce cas particulier. Elle consiste à partir de valeurs π_ℓ° des paramètres assez proches des vraies valeurs et à linéariser la dépendance des ξ_{ij} par rapport aux π_ℓ au voisinage des π_ℓ° :

$$\xi_{ij}(\pi_\ell) = \xi_{ij}(\pi_\ell^\circ) + \sum_\ell \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \pi_\ell} \times (\pi_\ell - \pi_\ell^\circ)$$

les dérivées partielles étant calculées pour $\pi_\ell = \pi_\ell^\circ$. En posant $\Delta\pi_\ell = \pi_\ell - \pi_\ell^\circ$ et $\Delta\xi_{ij} = \xi_{ij}^{mes} - \xi_{ij}(\pi_\ell^\circ)$ le χ^2 s'écrit :

$$\chi^2 = \sum_i \sum_{j,k} \left(\rho_i^{-1}\right)_{jk} \left[\Delta\xi_{ij} - \sum_\ell \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \pi_\ell} \Delta\pi_\ell\right] \times \left[\Delta\xi_{ik} - \sum_m \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial \pi_m} \Delta\pi_\ell\right]$$

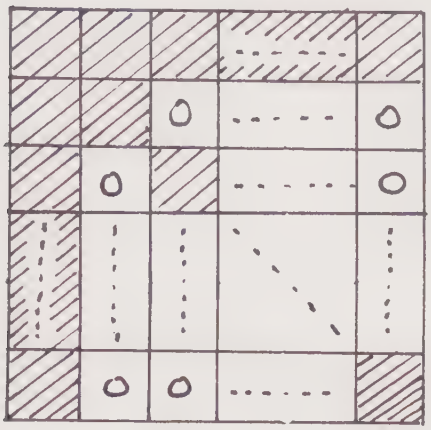
Posons :

$$M_{\ell m} = \sum_{i,j,k} \left(\rho_i^{-1}\right)_{jk} \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \pi_\ell} \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial \pi_m}$$

$$V_\ell = \sum_{i,j,k} \left(\rho_i^{-1}\right)_{jk} \frac{\partial \xi_{ij}}{\partial \pi_\ell} \Delta\xi_{ik}$$

Dans ces expressions, la sommation sur i ne comporte plusieurs termes que si l et m correspondent tous deux à une coordonnée du vertex ; il n'y a qu'un terme si l est une coordonnée du vertex et m un paramètre d'une trace (ou vice-versa) et $M_{\ell m}$ est nul si l et m sont des paramètres de traces différentes. La matrice M a donc

la structure suivante par blocs (3 x 3) :



(les hachures désignent les blocs non identiquement nuls)

On obtient les $\Delta \pi_\ell$ minimisant le χ^2 par :

$$\Delta \pi_\ell = \sum_m \left(M^{-1}\right)_{\ell m} V_m$$

Ceci donne des valeurs $\pi_\ell^1 = \pi_\ell^0 + \Delta \pi_\ell$ qui servent de point de départ à une nouvelle minimisation éventuelle et ainsi de suite. A chaque itération, on calcule le χ^2 et on choisit de s'arrêter si la variation du χ^2, restant négative, devient inférieure, en valeur absolue, à une certaine limite. Si le χ^2 croît, on opère une nouvelle itération ; s'il est croissant à deux itérations successives, on abandonne l'ajustement.

Lorsque le processus a convergé, la matrice M^{-1} donne directement la matrice de covariance des paramètres π_ℓ (cf annexe 2).

Dans la pratique, la convergence est assurée dans la quasi-totalité des cas, et elle est très rapide : avec comme point de départ le vertex déterminé par ROMEO, on obtient à la première étape le χ^2 minimum, à moins de 1% près. On a donc supprimé l'itération dans ce cas. Quand le point de départ est défini par des intersections de cercles, une ou deux étapes suffisent en général, rarement trois.

Les cas où on observe une augmentation significative du χ^2 (le plus souvent à la première étape) correspondent à un mauvais point de départ (par exemple si deux intersections étant acceptables en projection, l'une s'avère inacceptable dans l'espace) ou à des traces mal mesurées, ou parasites.

Un autre phénomène (rare lui aussi) peut aussi se produire : dans la mesure où le paramètre 1/p est laissé libre, il peut changer de signe au cours de l'ajustement : ceci correspond souvent à une trace parasite, et dans ce cas l'ajustement est abandonné.

3.2.2.2. *Paramétrisation du second degré.*

Nous cherchons à décrire la $i^{ème}$ trace au voisinage du vertex (X, Y, Z) par des équations de la forme :

$$y_i = Y + a_i (x-X) + \frac{1}{2} \frac{da_i}{dx} (x-X)^2$$

$$z_i = Z + b_i (x-X) + \frac{1}{2} \frac{db_i}{dx} (x-X)^2$$

Si c_{ix}, c_{iy}, c_{iz} sont les cosinus directeurs de la trace, on voit immédiatement que $a_i = \frac{c_{iy}}{c_{ix}}$ et $b_i = \frac{c_{iz}}{c_{ix}}$ Les dérivées $\frac{da_i}{dx}$ et $\frac{db_i}{dx}$ dépendent en outre de $1/p_i$ et du champ magnétique (B_x, B_y, B_z) au vertex. La variation des cosinus directeurs peut être déduite de l'équation fondamentale :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

qui donne :

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = e \vec{u} \wedge \vec{B}$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire (c_x, c_y, c_z) et ds l'élément de longueur sur la trajectoire : $ds = \frac{dx}{c_x}$

D'autre part, dans les unités choisies $e = SK$, K étant la constante reliant le rayon de courbure R à l'impulsion p par $R = \frac{p}{kB}$ (pour une trace perpendiculaire au champ) et S le signe de la charge. On trouve donc :

$$\frac{dp_x}{dx} = \frac{SK}{c_x}\left(c_y B_z - c_z B_y\right)$$

$$\frac{dp_y}{dx} = \frac{SK}{c_x}\left(c_z B_x - c_x B_z\right)$$

$$\frac{dp_z}{dx} = \frac{SK}{c_x}\left(c_x B_y - c_y B_x\right)$$

En remarquant que $a = \frac{p_y}{p_x}$ et $b = \frac{p_z}{p_x}$, on obtient :

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{p_x^2}\left(p_x \frac{dp_y}{dx} - p_y \frac{dp_x}{dx}\right)$$

$$= \frac{SK}{p c_x}\left[\frac{c_z}{c_x} B_x + \frac{c_y c_z}{c_x^2} B_y - \left(1 + \frac{c_y^2}{c_x^2}\right) B_z\right]$$

$$= \frac{SK\sqrt{1+a^2+b^2}}{p}\left[b B_x + ab B_y - (1+a^2) B_z\right]$$

De même

$$\frac{db}{dx} = \frac{1}{P_x^2}\left(P_x \frac{dP_z}{dx} - P_z \frac{dP_z}{dx}\right)$$

$$= \frac{SK}{p\,c_x}\left[-\frac{c_y}{c_x} B_x + \left(1+\frac{c_z^2}{c_x^2}\right) B_y - \frac{c_y c_z}{c_x^2} B_z\right]$$

$$= \frac{SK\sqrt{1+a^2+b^2}}{p}\left[-a B_x + (1+b^2) B_y - ab\, B_z\right]$$

On obtient ainsi les équations de la trace en fonction des paramètres a, b et d = 1/p : ce sont ceux que nous adopterons à la place de λ, φ et d. Ils évitent en effet tout recours aux fonctions trigonométriques, ce qui réduit les temps de calculs sur ordinateur.

3.2.2.3. Calcul des dérivées partielles.

En désignant par $Y_i, Z_i, \alpha_i, \beta_i$ et δ_i les paramètres de la trace à l'abscisse X_i où elle a été extrapolée, la paramétrisation précédente fournit immédiatement :

$$\alpha_i = a_i + \frac{da_i}{dx}(X_i - X)$$

$$\beta_i = b_i + \frac{db_i}{dx}(X_i - X)$$

$$\delta_i = d_i$$

On en déduit les dérivées de $Y_i, Z_i, \alpha_i, \beta_i, \delta_i$ par rapport aux paramètres X, Y, Z, a_i, b_i, d_i à ajuster ; nous n'écrirons que les dérivées non nulles, en négligeant les termes en $(X_i - X)^2$ et en posant :

$$\Delta X_i = X_i - X \quad \text{et} \quad F_i = S_i K d_i \sqrt{1+a_i^2+b_i^2}$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial Y} = \frac{\partial Z_i}{\partial Z} = \frac{\partial \delta_i}{\partial d_i} = 1$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial a_i} = \frac{\partial Z_i}{\partial b_i} = \Delta X_i$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial X} = -a_i + \Delta X_i \frac{da_i}{dx}$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial X} = -b_i + \Delta X_i \frac{db_i}{dx}$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial X} = -\frac{da_i}{dx} \quad ; \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial X} = -\frac{db_i}{dx}$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial d_i} = \frac{\Delta X_i}{d_i} \cdot \frac{da_i}{dx} \quad ; \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial d_i} = \frac{\Delta X_i}{d_i} \cdot \frac{db_i}{dx}$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial a_i} = 1 + \Delta X_i \left[\frac{a_i}{1+a_i^2+b_i^2} \frac{da_i}{dx} + F_i (b_i B_y - 2a_i B_z) \right]$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial b_i} = 1 + \Delta X_i \left[\frac{b_i}{1+a_i^2+b_i^2} \frac{db_i}{dx} + F_i (2b_i B_y - a_i B_z) \right]$$

Les expressions de $\frac{da_i}{dx}$ et $\frac{db_i}{dx}$ ont été données dans le paragraphe précédent (3.2.2.2.).

Il est clair que si les ΔX_i sont suffisamment petits dans tous les cas (c'est à dire si on est sûr d'avoir pris comme point de départ de l'ajustement un point très proche du vrai vertex), on peut, dans certaines de ces expressions, supprimer le terme en ΔX_i, ce qui les simplifie considérablement ; d'une façon générale, les coefficients faisant intervenir la courbure $\left(\frac{da_i}{dx}, \frac{db_i}{dx}, F_i\right)$ sont faibles pour des traces à grande impulsion, et le produit d'un de ces coefficients par ΔX_i peut vraisemblablement être omis. Nous n'avons pas essayé d'exploiter ces possibilités de simplification, car ce n'est pas le calcul des dérivées qui prend le plus de temps, mais plutôt les inversions de matrices.

3.3. MATRICES D'ERREURS, BIAIS ET AUTOCALIBRATION :

3.3.1. Critique du calcul des matrices d'erreurs des traces :

Ces matrices sont calculées par ROMEO à partir de l'ajustement géométrique de chaque trace. Ce calcul suppose implicitement plusieurs conditions :

(1) l'évaluation quantitative des erreurs de mesure est correcte.

(2) Elles peuvent être traitées comme des variables gaussiennes et indépendantes.

(3) Les particules suivent des trajectoires "théoriques" c'est à dire ne subissent que l'action du champ magnétique.

(4) Les distorsions introduites par l'appareillage sont négligeables.

Pour essayer de satisfaire (1), ROMEO renormalise les erreurs pour chaque trace de façon à ce que le χ^2 soit égal au nombre de degrés de liberté de l'ajustement ; ceci suppose que la condition (2) est remplie, ce qui n'est pas toujours le cas : nous indiquons dans l'annexe 3 différentes circonstances où elle ne l'est pas, en particulier pour des mesures discrètes.

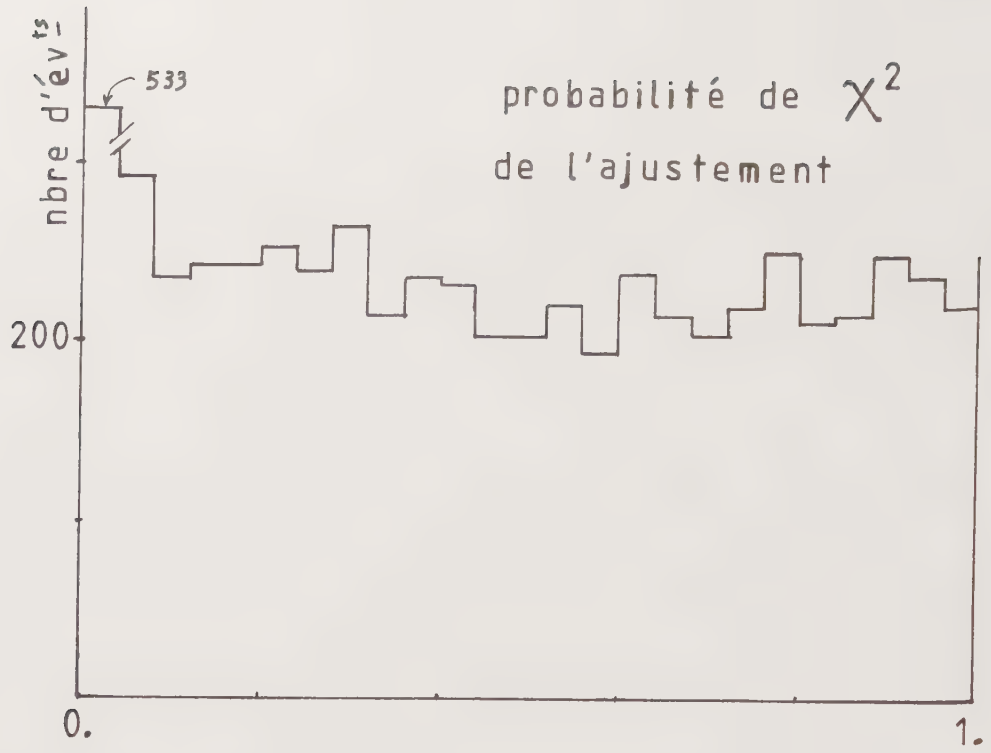
La condition (3) est mise en défaut par le fait que les particules traversent de la matière, ce qui entraîne une perte d'énergie et diffusion coulombienne multiple, ou hadronique. Dans l'annexe 4, nous étudions en détail la diffusion multiple, et nous montrons qu'elle peut entraîner une sous-estimation importante des erreurs.

La condition (4) peut être assurée en principe par une calibration d'ensemble ; il subsiste cependant toujours des distorsions qui, comme les diffusions, impliquent une sous-estimation des erreurs. Dans les deux cas, le mécanisme est le même : l'ajustement peut compenser les déformations de la trace par une variation des paramètres, ce qui fait que les résidus sont peu augmentés du fait de ces déformations ; le résidu quadratique moyen augmente relativement moins que la dispersion sur les paramètres au point de départ de la trace.

Il apparaît donc que les matrices d'erreurs ont un caractère assez douteux. Il est vrai que les valeurs ajustées sont peu sensibles à une mauvaise évaluation de ces matrices : par contre les distributions des résidus en seront affectées, et la probabilité qu'on calcule en supposant une distribution de χ^2 classique n'a plus de raison d'avoir une distribution plate, et il n'est plus licite de pondérer une coupure en probabilité en faisant cette hypothèse d'uniformité. Nous montrons dans l'annexe 3 de quelle façon la distribution en probabilité de χ^2 peut être déformée. Même si on réajuste les valeurs affectées aux erreurs de mesure pour obtenir une distribution à peu près régulière, il peut subsister une accumulation aux faibles probabilités qu'on ne peut distinguer du fond constitué par les hypothèses erronées : nous en verrons une preuve dans le dénombrement des événements en 4.1.5.

3.3.2. Réajustement des matrices d'erreurs.

Plutôt que de chercher à détailler toutes les contributions possibles, nous avons utilisé l'ajustement du vertex pour réajuster les matrices d'erreurs, et nous avons constaté empiriquement qu'une simple multiplication de


nbre d'évts
533
200
0.
1.
probabilité de χ^2
de l'ajustement

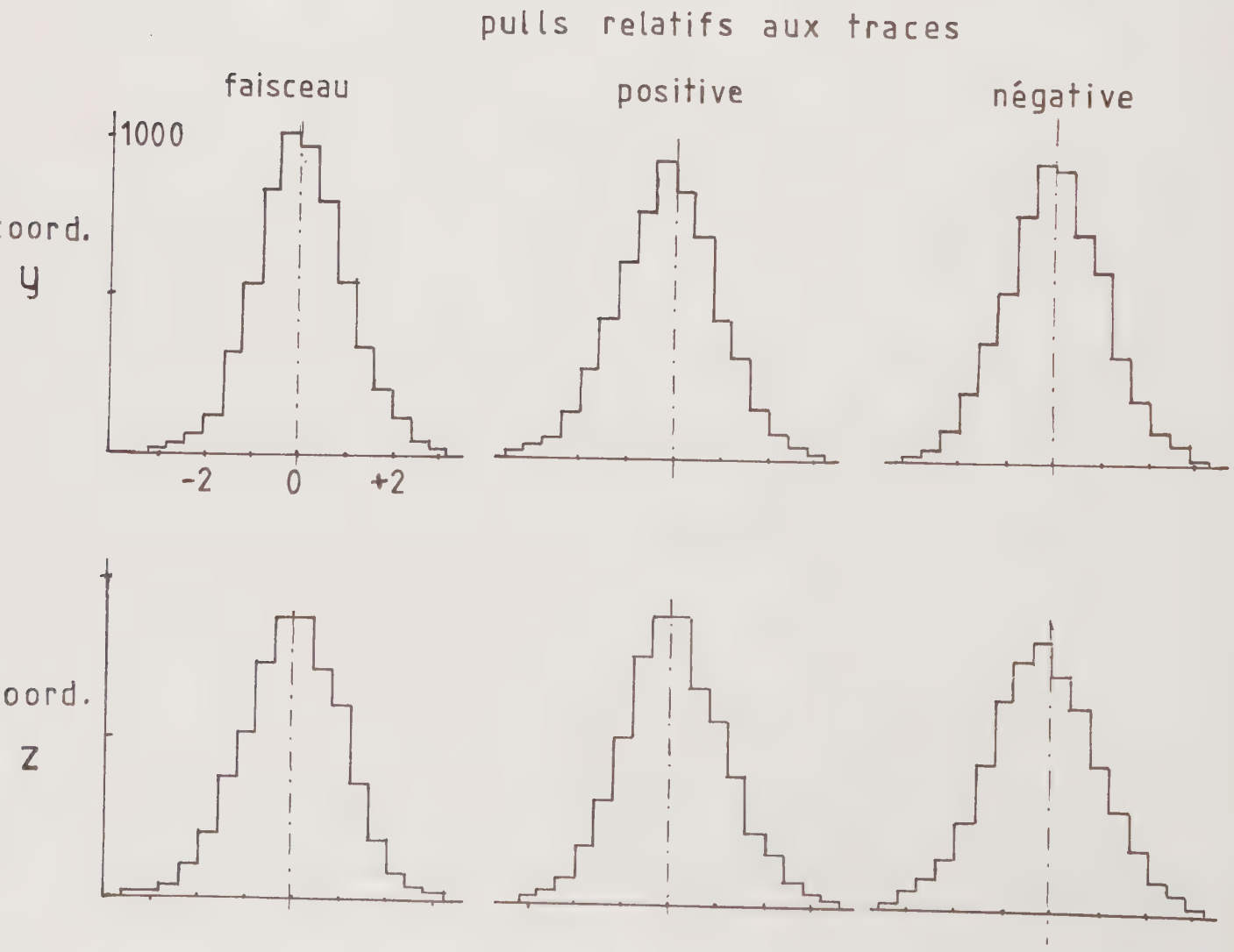

pulls relatifs aux traces
faisceau
positive
négative
1000
oord.
y
-2
0
+2
oord.
z

FIG. 3.1

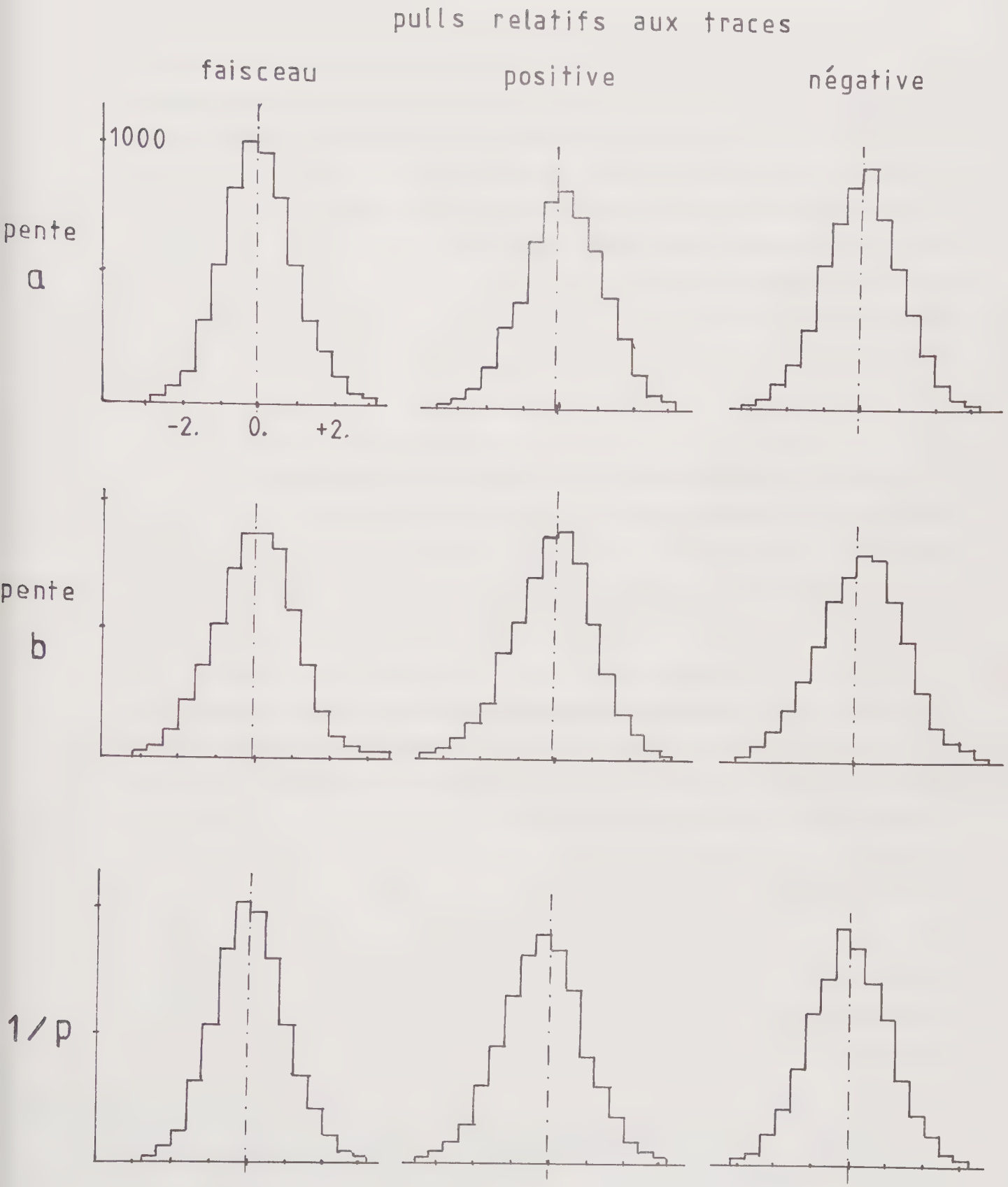

pulls relatifs aux traces
faisceau
positive
négative
1000
pente
a
-2.
0.
+2.
pente
b
1/p

FIG. 3.1

toutes les matrices par un même facteur (dépendant de l'énergie, et de l'ordre de 2) suffisait à donner une allure très acceptable aux "pulls" sur les différentes variables (tels qu'ils sont définis et justifiés dans l'annexe 2) et à la distribution en probabilité (cf fig. 3.1), avec une accumulation aux faibles valeurs malgré la quasi-absence de fond.

La trace du faisceau constitue un cas un peu à part : quand l'information des chambres ou du spectromètre ne suffit pas à la définir complètement, on attribue aux quantités non définies des valeurs nominales, ainsi que des erreurs nominales déduites des distributions observées dans les données de calibration du faisceau : les dispersions ainsi mesurées n'ont pas à être réajustées, et les termes correspondants des matrices d'erreurs ne sont pas modifiés.

Malgré les réserves faites précédemment sur la signification de la probabilité, les matrices d'erreurs ainsi modifiées sont plus réalistes que celles qui sont calculées par ROMEO. Toutefois, il subsiste une source d'erreurs importante à laquelle l'ajustement du vertex est très peu sensible : l'épaisseur de matière traversée dans la cible et autour d'elle (scintillateurs) : une déviation de la trace si proche du vertex n'affecte pas la précision de la convergence des traces ; par contre les paramètres angulaires des traces au vertex sont entachés d'une incertitude supplémentaire : il faut donc s'attendre à ce que les erreurs suggérées par l'ajustement (géométrique) du vertex soient encore sous-estimées, ce qui apparaîtra quand on imposera les contraintes cinématiques.

3.3.3. Calibration mutuelle des traces :

Il s'agit ici uniquement de la calibration du faisceau par rapport aux autres traces, qui sont mesurées dans le même ensemble de détecteurs supposé sans distorsion après repérage des marques fiducielles et calibration par les fils droits (cf. 1.2.4.).

Une première calibration avait été obtenue par une extrapolation vers les chambres B_1, B_2, B_3 de traces du faisceau vues dans les modules optiques (2.2.5.1.). L'ajustement du vertex fournit une méthode plus précise.

Les résidus de cet ajustement peuvent être recentrés par un décalage des valeurs initiales (c'est à dire à l'entrée de la cible) de y, z, φ et λ pour le faisceau ; il est toutefois difficile de déterminer en même temps ces quatre décalages car les couples (y, φ) et (z, λ) sont fortement corrélés : on risque donc de décaler beaucoup trop y dans un sens et φ dans l'autre, l'effet de ces deux décalages se compensant en moyenne au niveau du vertex, et ne se manifestant que par une dispersion un peu accrue ; ceci vient du fait que les vertex sont étalés sur une distance inférieure à 50 cm, petite par rapport au bras de levier constitué par les chambres B_1, B_2, B_3.

Pour éviter cela nous avons recours en plus à une contrainte cinématique sur les événements élastiques : y et z étant inchangés, les angles φ et λ du faisceau sont, dans un premier temps, décalés de façon à annuler respectivement les valeurs moyennes de P_y et P_z manquant ; puis y et z sont décalés de façon à annuler les résidus moyens. L'ajustement est recommencé avec les nouvelles variables et au besoin on réitère la procédure.

On constate qu'on arrive bien de cette façon à centrer tous les résidus à la fois sans pour autant augmenter leur dispersion , et sans imposer de décalages trop importants. Toutefois ceux-ci sont parfois plus grands que ne le permettrait la précision de la première calibration : ce qui semble indiquer qu'il subsistait des distorsions sans qu'on puisse dire à quel niveau. La deuxième calibration peut contribuer à les réduire, mais ce n'est pas sûr, puisqu'elle ne fait qu'en éliminer certains symptômes.

3.4. UTILISATION POUR LA CINEMATIQUE :

3.4.1. Algorithme.

L'ajustement du vertex fournit, à la dernière itération, un ensemble de paramètres et leur matrice de covariance G (plus précisément sur inverse G^{-1}). Un changement de variables simple permet de passer, pour chaque trace, des quantités (a, b, d) à (p_x, p_y, p_z) qui sont les bonnes variables pour l'ajustement à 3 contraintes (conservation de l'impulsion) défini en 2.4.2. On obtient ainsi la matrice des poids C^{-1} sur les 3n + 3 variables (n = nombre de traces, donc ici 3) : X, Y, Z (coordonnées du vertex) et p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} pour chaque trace. Choisissons i = 0 pour le faisceau et i = 1,2 pour les traces sortantes.

Plutôt que d'inverser la matrice C^{-1} (12 x 12) et d'appliquer le formalisme de l'ajustement non paramétrique avec contraintes (cf. annexe 2), il est plus simple de traiter le problème comme un ajustement à 9 paramètres X, Y, Z, p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} (i = 1,2), les variables de la trace faisceau étant définies par $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Nous n'aurons ainsi qu'une matrice (9 x9) à inverser.

Nous avons vu en 3.2.2.1. que la matrice G^{-1} (notée M) avait une structure particulière par blocs (3 x 3). Le changement de variables n'intervenant qu'à l'intérieur de chaque bloc de 3 variables, la matrice C^{-1} aura la même structure, qu'on peut écrire :

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} A & B_0 & B_1 & B_2 \\ B_0^t & D_0 & 0 & 0 \\ B_1^t & 0 & D_1 & 0 \\ B_2^t & 0 & 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

D'autre part, vu le choix des paramètres, la matrice des dérivées des variables par rapport aux paramètres est très simple :

paramètres \ variables	$\vec{V}$	$\vec{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$
$\vec{V}$	1	0	0	0
$\vec{P}_1$	0	1	1	0
$\vec{P}_2$	0	1	0	1

($\vec{V}$ est le vecteur de composantes X, Y, Z)

La dépendance est ici exactement linéaire, donc l'ajustement n'a pas besoin d'itération.

En prenant pour valeurs de départ celles qui sont issues de l'ajustement de vertex, et en posant :

$$\vec{P}_m = \vec{P}_0 - \vec{P}_1 - \vec{P}_2 \qquad \text{(impulsion manquante)}$$

les variations $\Delta\vec{V}$, $\Delta\vec{P}_1$ et $\Delta\vec{P}_2$ des paramètres seront les solutions du système matriciel :

$$\begin{bmatrix} A & B_0+B_1 & B_0+B_2 \\ B_0^t+B_1^t & D_0+D_1 & D_0 \\ B_0^t+B_2^t & D_0 & D_0+D_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 P_m \\ D_0 P_m \\ D_0 P_m \end{bmatrix}$$

Les coordonnées du vertex ne sont introduites dans l'ajustement que par raison de cohérence mathématique. Les quantités intéressantes sont $\Delta\vec{p}_1$ et $\Delta\vec{p}_2$ qui fournissent les valeurs ajustées de $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ et $\vec{p}_o$ à partir desquelles on peut calculer la même variable δm^2 qu'en 2.4.2. On peut aussi en déduire une probabilité de χ^2, dont la distribution peut être rendue à peu près plate en multipliant la matrice C globalement par un facteur de l'ordre de 2, déterminé empiriquement : ce facteur confirme la remarque finale dans 3.3.2. sur la présence de matière autour du vertex.

3.4.2. Récupération des vertex perdus par ROMEO

Les événements pour lesquels l'ajustement de vertex de ROMEO a échoué sont traités de la manière suivante : on impose à la trace du faisceau des valeurs nominales des paramètres et de leurs erreurs, déduites des données de calibration (cf. 1.1.5.). Le point de départ de l'itération est fourni par l'intersection des cercles qui extrapolent approximativement les traces en projection horizontale, ou par leur point d'approche mutuelle maximale ; à partir de là la procédure d'ajustement est exactement la même que pour les autres événements. En cas d'échec, l'événement est définitivement rejeté.

On applique ensuite les mêmes coupures (impulsion manquante, coplanarité, angle d'ouverture) qu'en 2.3.2.

3.4.3. Résultats.

La distribution de la variable discriminatoire δm^2 définie en 2.4.2. apparaît nettement plus étroite que sans ajustement global de vertex ; il en est de même pour l'impulsion manquante aux événements élastiques sélectionnés par une coupure en δm^2 (voir fig. 3.2. ainsi que la comparaison des fig. 2.3 et 3.3). Ce résultat justifie a posteriori la méthode, et signifie que l'effet bénéfique de la contrainte apportée par le vertex l'emporte sur les éventuels biais et distorsions.

Etant donné le petit nombre d'événements à grand angle obtenus dans cette expérience, une plus grande précision sur les composantes dès impulsions (donc sur l'angle de diffusion) n'est pas intéressante en soi. Ce que nous gagnons est plutôt une meilleure réjection du fond, donc une détermination plus fiable de la section efficace élastique dans les zones où elle est faible, et une discrimination meilleure des hypothèses $K^- K^+$ et $\pi^- \pi^+$ dans l'interaction $\bar{p}p$.

On constate sur la fig. 3.3 que les pics élastiques présentent encore la même dissymétrie que sur la fig. 2.3. La situation se simplifie beaucoup (voir fig. 3.4) si on sépare les événements C (à traces convergentes) des événements D (à traces divergentes). Les C , dont les traces sont mesurées sur une plus grande longueur, et ont un angle d'incidence plus faible dans les chambres à étincelles, ont une distribution en δm^2 étroite et bien centrée. Les D ont une distribution plus étalée, ce qui est logique ; son décalage, par contre, reste inexpliqué.

En tout cas, l'interprétation des événements méson-méson esquissée en 2.4.3. est renforcée : pour les C ce sont manifestement tous des $\pi^- \pi^+$ (sauf peut-être deux événements, dont la probabilité est très faible). Pour les D, ils s'interprètent de façon naturelle comme un pic $\pi^- \pi^+$ étalé et décalé vers la droite, comme le pic élastique.

3.0 GeV/c - avant ajustement du vertex

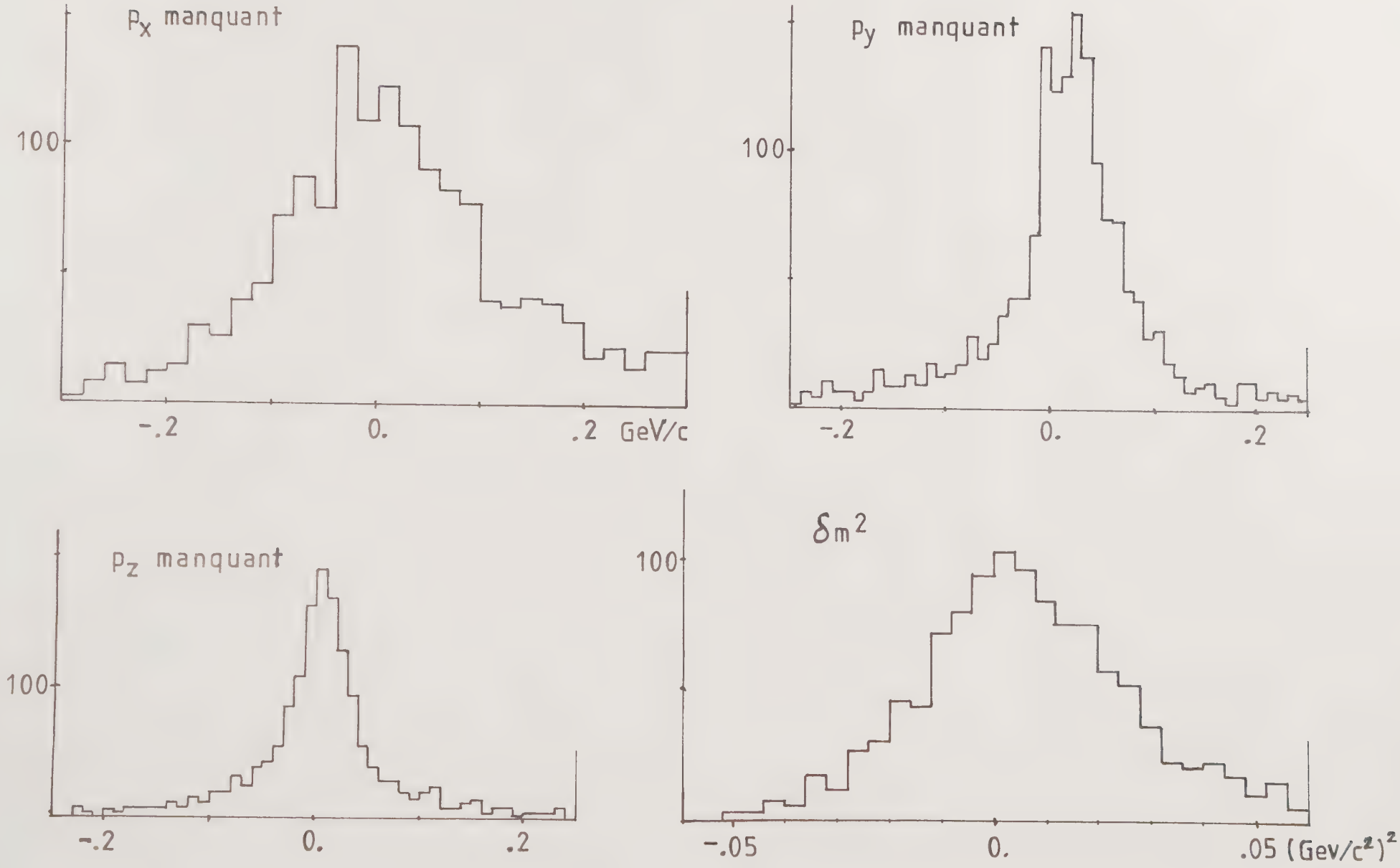
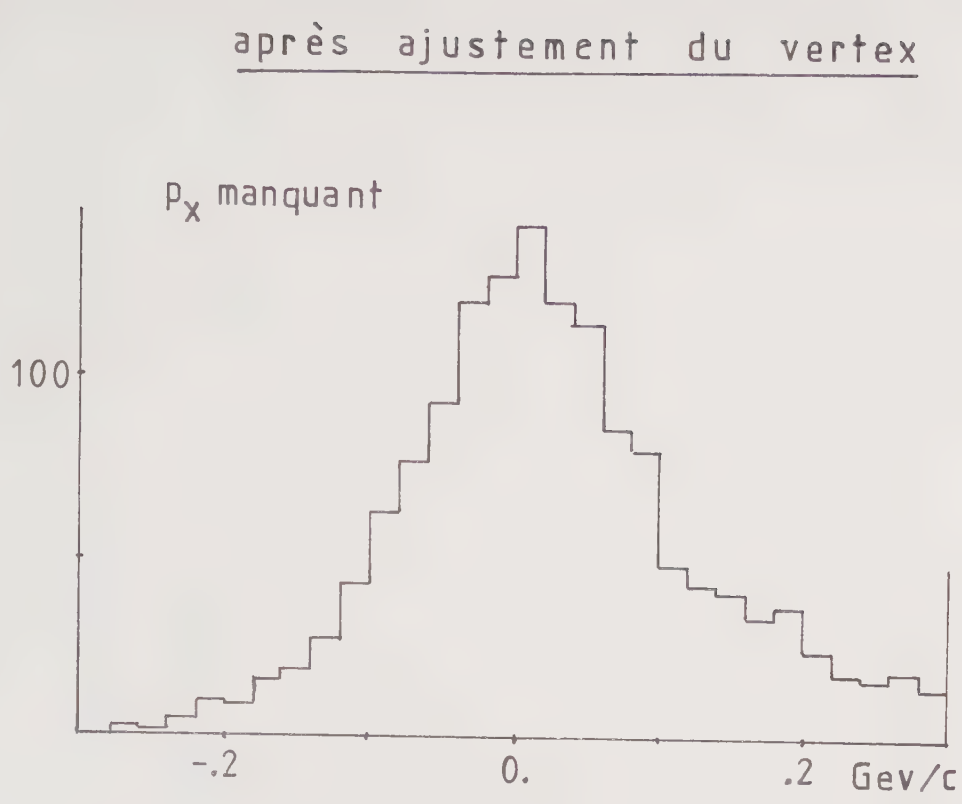
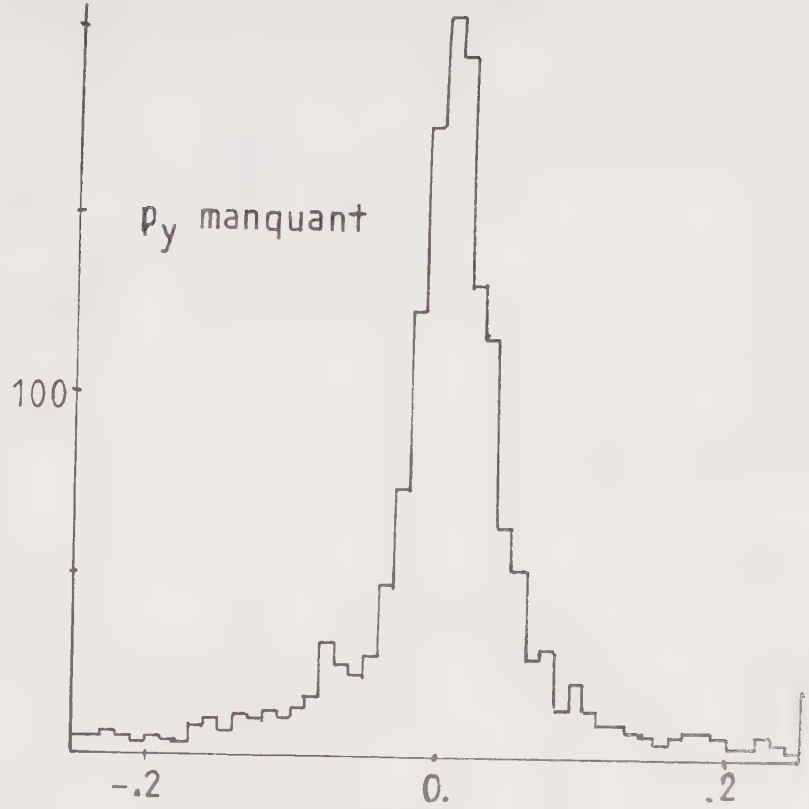
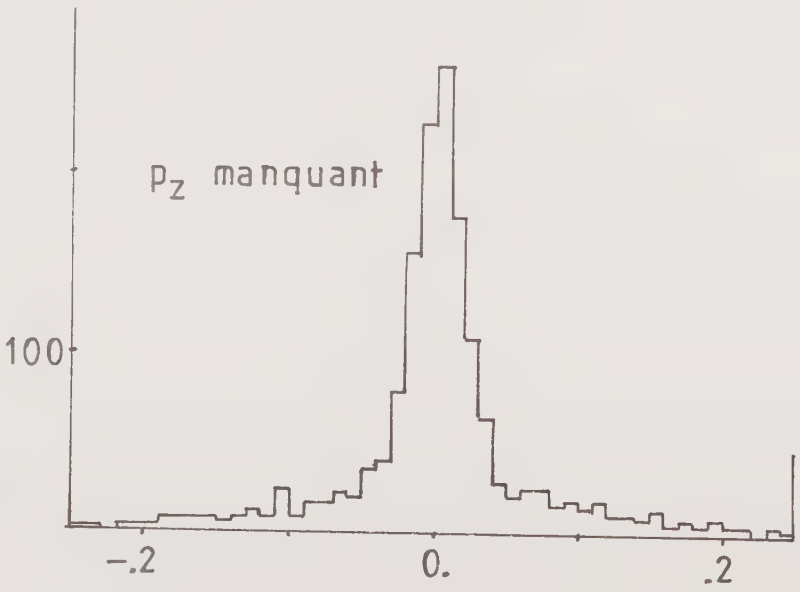


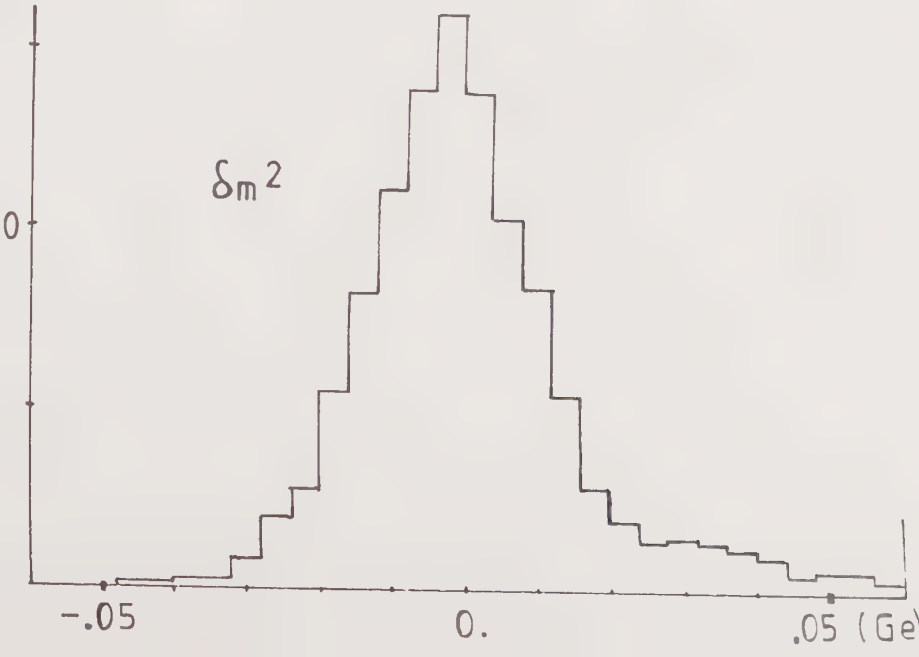
FIG. 3.2

après ajustement du vertex









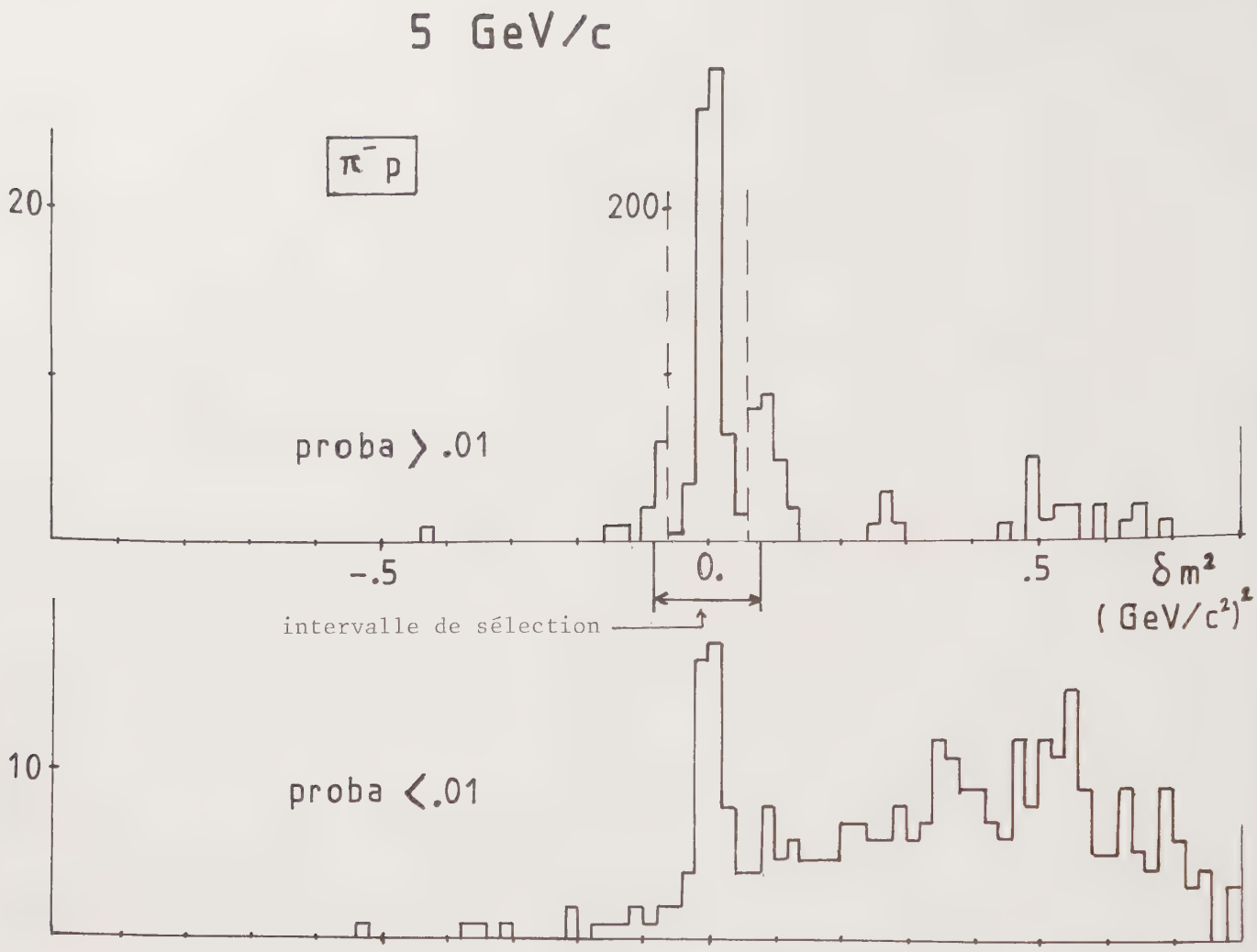
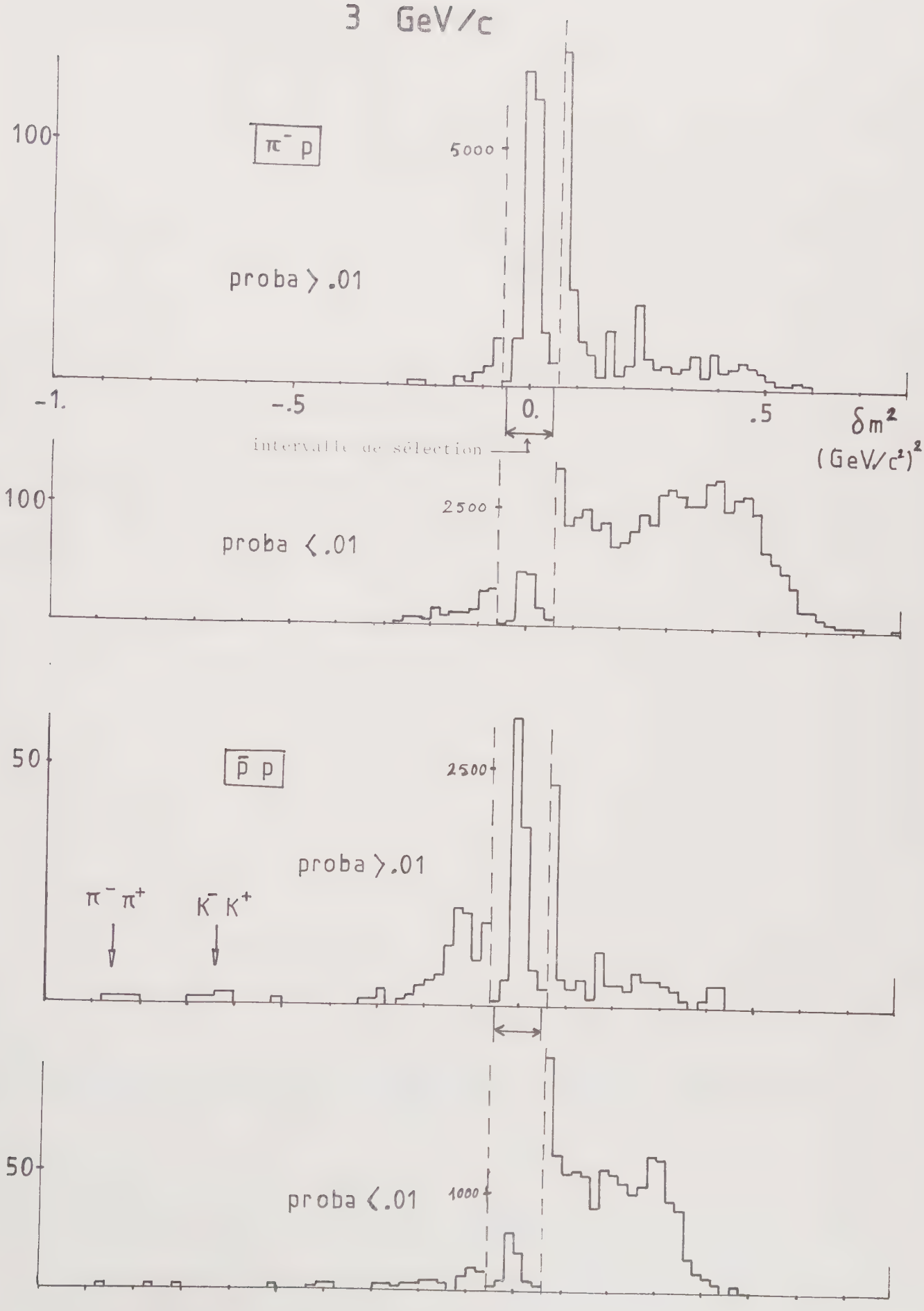

5 GeV/c
π⁻ p
20
200
proba ⟩ .01
-.5
0.
.5
δ m²
(GeV/c²)²
intervalle de sélection
10
proba ⟨ .01

FIG. 3.3


3 GeV/c
100
π⁻ p
5000
proba > .01
-1.
-.5
0.
.5
δm²
(GeV/c²)²
intervalle de sélection
100
2500
proba < .01
50
p̄ p
2500
proba > .01
π⁻ π⁺
K⁻ K⁺
50
1000
proba < .01

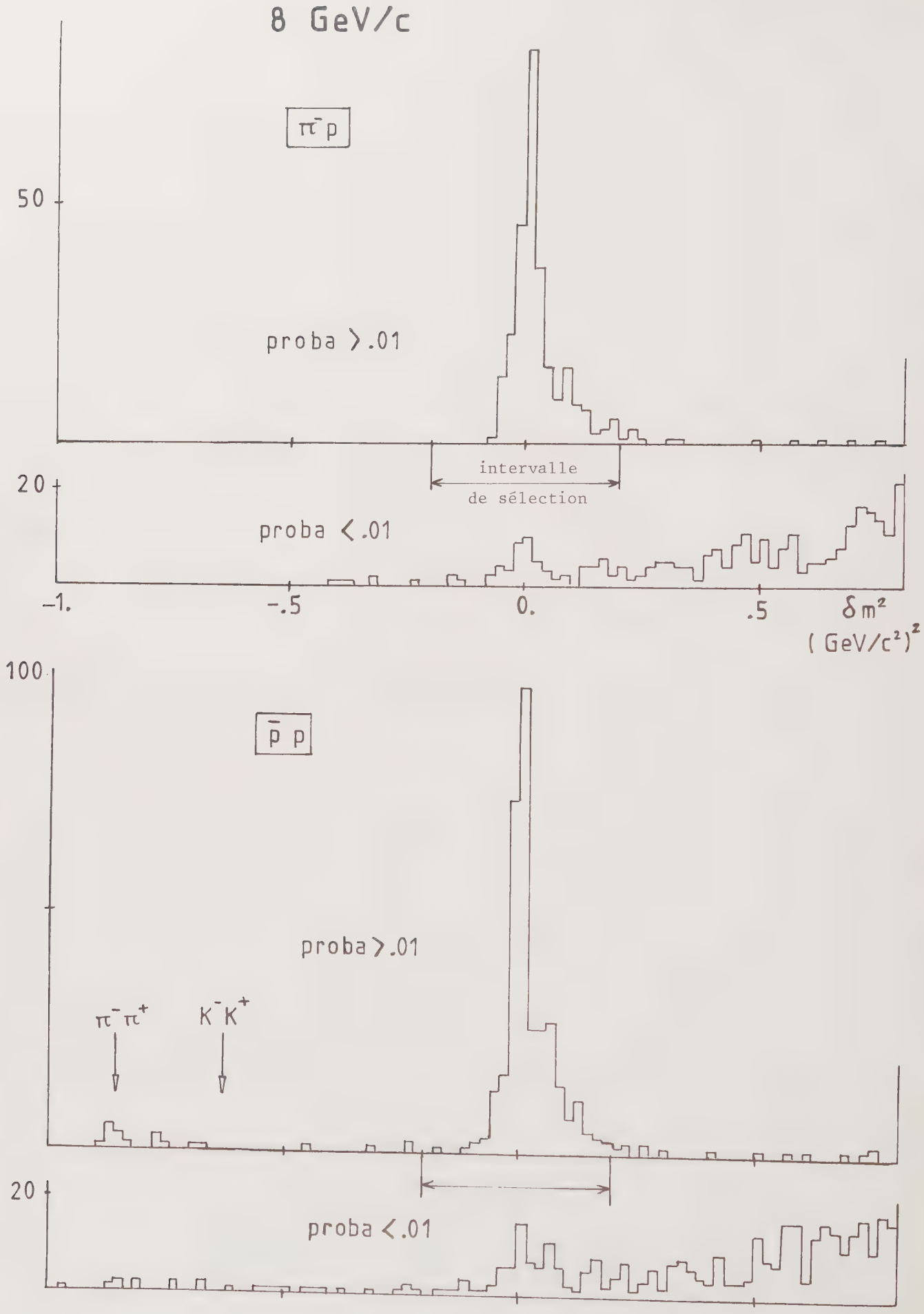
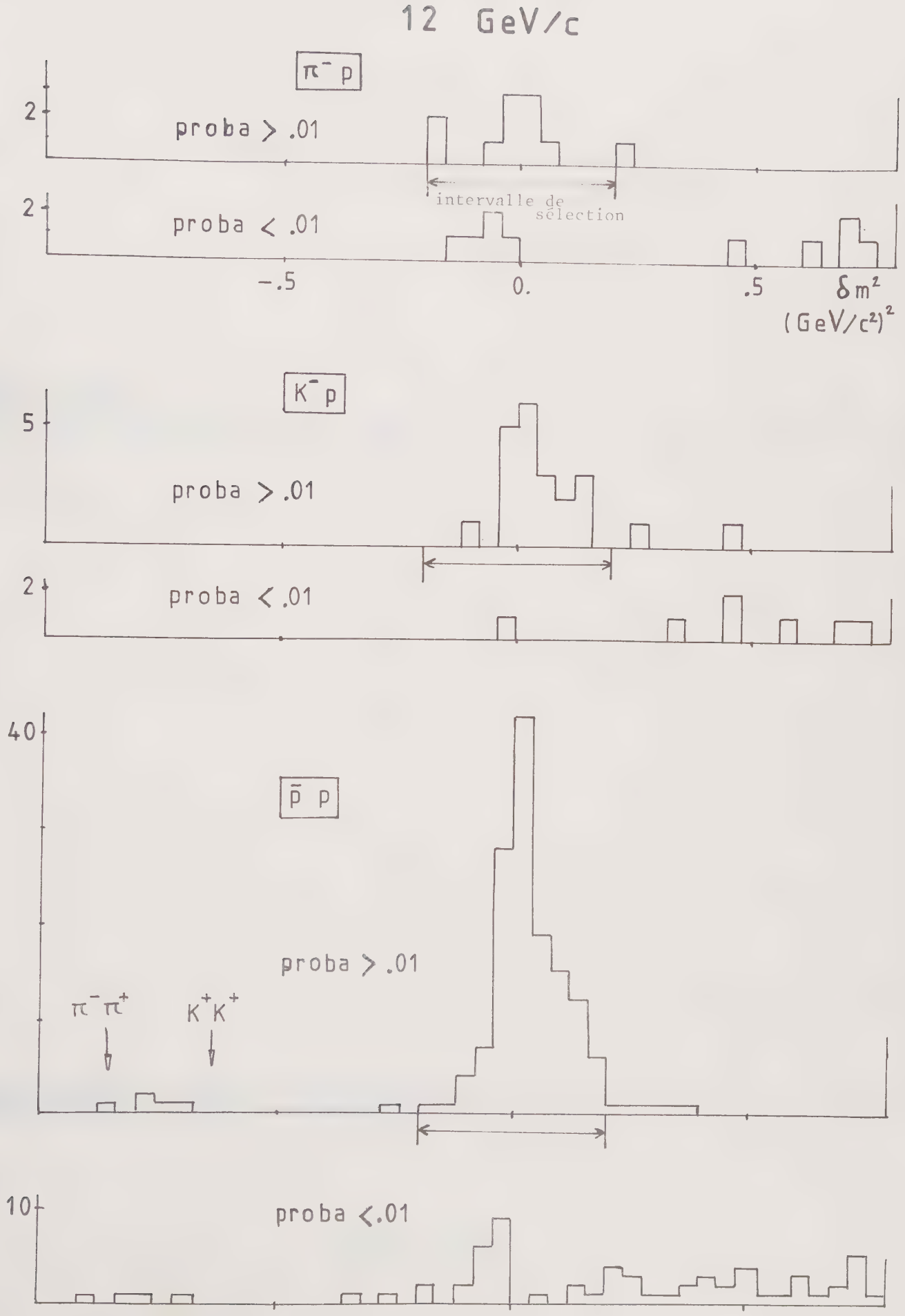

8 GeV/c
π⁻p
50
proba > .01
intervalle
de sélection
20
proba < .01
-1.
-.5
0.
.5
δm²
(GeV/c²)²
100
p̄ p
proba > .01
π⁻π⁺
K⁻K⁺
20
proba < .01

FIG. 3.3


12 GeV/c
$\pi^- p$
2
proba > .01
2
proba < .01
intervalle de sélection
-.5
0.
.5
δm^2
$(GeV/c^2)^2$
$K^- p$
5
proba > .01
2
proba < .01
40
$\bar{p}\ p$
proba > .01
$\pi^-\pi^+$
K^+K^+
10
proba <.01

$\bar{p}$ p 8 GeV/c

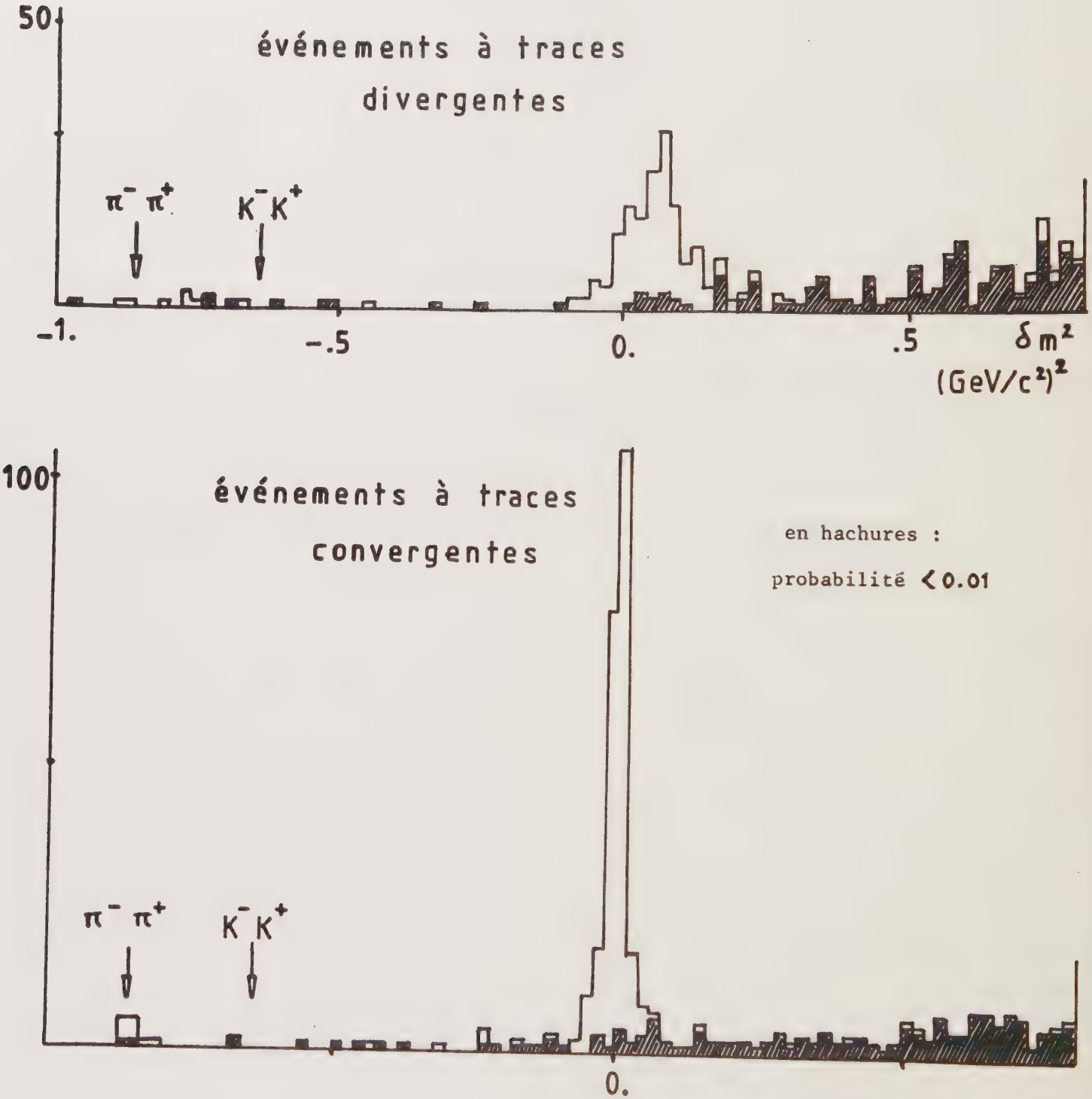


FIG. 3.4

CHAPITRE 4

LES SECTIONS EFFICACES DIFFERENTIELLES

4.1. CALCUL DES SECTIONS EFFICACES.

- 4.1.1. Formulation.
- 4.1.2. Calcul du flux incident et corrections.
- 4.1.3. Acceptance et efficacité de l'appareillage.
  - 4.1.3.1. Méthode de calcul
  - 4.1.3.2. Efficacité des scintillateurs
  - 4.1.3.3. Efficacité de la chambre de coplanarité
- 4.1.4. Pertes dues aux interactions secondaires.
- 4.1.5. Dénombrement des événements.
- 4.1.6. Contrôles de la simulation.

4.2. RESULTATS.

- 4.2.1. Réactions élastiques.
  - 4.2.1.1. Evaluation des erreurs
  - 4.2.1.2. Commentaires
- 4.2.2. Réactions d'annihilation.

4.3. COMPARAISONS AUX MODELES.

- 4.3.1. Les lois de comptage dimensionnel.
- 4.3.2. Prédictions de la Chromodynamique quantique.
- 4.3.3. Essais d'ajustements dépendant de l'énergie.
- 4.3.4. Commentaires.

CHAPITRE 4

LES SECTIONS EFFICACES DIFFÉRENTIELLES

4.1. CALCUL DES SECTIONS EFFICACES.

4.1.1. Formulation :

La cible contient n protons par unité de volume, avec $n = \mathcal{N}\rho / A$ ($\mathcal{N}$ nombre d'Avogadro, ρ masse volumique de l'hydrogène, A masse atomique). Dans les conditions de l'expérience, $n = 3{,}8 . 10^{22}$ cm^{-3}

Si la probabilité totale d'interaction d'un projectile sur une longueur l reste petite, la probabilité d'un processus de section efficace σ peut s'écrire :

$$p \simeq n \sigma l$$

Dans le cas général, il faut tenir compte de l'atténuation (exponentielle) du faisceau et écrire :

$$p = \frac{\sigma}{\sigma_{tot}} \left[1 - e^{- n \sigma_{tot} l} \right]$$

Pour les réactions étudiées ici, σ_{tot} est de l'ordre de 40 mb à toutes les impulsions (et davantage pour $\bar{p}p$ à basse impulsion), ce qui, pour un parcours de 60 cm dans l'hydrogène, donne $n \sigma_{tot} l \gtrsim 0{,}1$. On a donc tenu compte de l'atténuation ; il a été plus commode de l'intégrer dans l'évaluation de l'acceptance et d'utiliser $p = n \sigma l$.

Pour N_i particules incidentes, le nombre d'événements correspondant au processus en question s'écrit donc :

$$N_{év} = N_i \cdot p = N_i \, n \sigma l$$

Le nombre d'événements effectivement identifiés est donc

$$N'_{év} = \varepsilon N_i \, n \sigma l$$

ε étant le facteur qui inclut l'acceptance géométrique et l'efficacité globale de l'appareillage (déclenchement et détection), calculé par simulation, pour toute la gamme accessible en θ_{cm} , à partir des diverses efficacités mesurées indépendamment ; ε tient compte aussi de l'efficacité de reconstruction géométrique et cinématique, qu'on traduit par un facteur évalué globalement pour chaque énergie : en réalité cette efficacité dépend sans doute aussi de θ_{cm} , mais une analyse plus fine risquerait d'être irréaliste.

Pour le calcul des sections efficaces différentielles $\frac{d\sigma}{dt}$, le domaine accessible en $\cos \theta_{cm}$ est découpé en intervalles égaux (.05), dans chacun desquels on calcule une valeur moyenne pour ε ; dans le cas où les événements sont trop nombreux, on regroupe des intervalles adjacents : on obtient une bonne estimation du $\frac{d\sigma}{dt}$ moyen dans ce regroupement en faisant la moyenne du nombre d'événements, pondérés par $1/\varepsilon$ dans chaque intervalle.

Pour certaines études (ajustements par maximum de vraisemblance) on ne découpe pas d'intervalles en $\cos \theta_{cm}$, et on attribue à chaque événement son propre poids, en faisant une interpolation lisse entre les valeurs de calculées.

4.1.2. Calcul du flux incident et corrections :

Des échelles de comptage totalisent les particules incidentes suivant leur nature, à partir des signaux de scintillateurs S1, S2 , S4 , V2 , V4 (cf. 1.3.2.) et des compteurs Cerenkov C_1 et C_2 (cf. 1.1.3.). Ces échelles étant

arrêtées pendant les temps morts du déclenchement, elles indiquent directement le nombre de projectiles utiles, c'est-à-dire susceptibles de produire une interaction détectable.

Toutefois la protection passé-futur (cf. 1.3.1.) introduite pour éviter la superposition de deux interactions dans les modules optiques amène à diminuer ce nombre d'un facteur qui dépend de l'intensité du faisceau, et qui a été déterminé pour chaque "run" (c'est-à-dire chaque série d'événements pris sur une même bande dans les mêmes conditions).

L'identification était la plupart du temps inambiguë. Les 2 à 3 % de particules du faisceau ambiguës ont été ignorées, ainsi que les événements correspondants. Même si l'identification en ligne n'est pas toujours la même que celle déterminée hors ligne d'après l'enregistrement sur bande, l'erreur qui en résulte sur le dénombrement reste très faible.

Une autre correction a dû intervenir pour compenser une circonstance accidentelle constatée après coup : d'après la distribution des vertex d'interaction, la cible n'était pas remplie d'hydrogène liquide ; le niveau est resté à peu près constant (à 1 mm près) à 12 mm au-dessus du plan médian, neutralisant une bonne partie du faisceau. La distribution verticale a été évaluée d'après les enregistrements de faisceau sans interaction, effectués pour chaque impulsion. Si on admet que la distribution était la même pendant les prises de données (on ne peut s'en assurer qu'au-dessous du niveau d'hydrogène) on trouve les pourcentages de perte suivants (qui ne dépendent pas de la nature de la particule incidente).

Impulsion (GeV/c)	3.0	3.1	3.2	3.3	5	8	12
Perte (%)	27,5	21	25,5	22	48	9,5	5

Il est difficile de donner des incertitudes sur les chiffres. Nous les avons évaluées à 5 % en valeur absolue.

4.1.3. Acceptance et efficacité de l'appareillage :

4.1.3.1. Méthode de calcul :

On évalue par simulation aléatoire (méthode de Monte Carlo) la probabilité de détection pour chaque réaction à deux corps en fonction du seul paramètre physiquement significatif : l'angle θ_{cm} de diffusion dans le référentiel du centre de masse.

Pour cela, on tire au hasard des événements suivant une loi de probabilité uniforme dans l'espace des phases, les vertex étant répartis conformément à la loi de décroissance exponentielle de l'intensité du faisceau. Pour chaque événement, les traces sont suivies dans le champ magnétique par une extrapolation précise (RKUTAS), et on détermine ainsi si elles entrent dans l'acceptance géométrique définie par les limites des détecteurs.

Pour chaque élément de la logique de déclenchement, on simule l'inefficacité par une certaine probabilité d'absence de signal ; on ne tient pas compte des signaux fortuits, ni de l'inefficacité des éléments mis en veto : celle-ci a été compensée, quand c'était possible, par des coupures a posteriori sur les événements reconstruits.

Dans chaque intervalle en $\cos\theta_{cm}$, on définit alors une acceptance globale en faisant le rapport du nombre d'événements ayant satisfait à la condition de déclenchement, sur le nombre d'événements initialement simulés. La courbe d'acceptance en fonction de θ_{cm} est ensuite lissée pour atténuer l'effet des fluctuations.

4.1.3.2. Efficacité des scintillateurs :

Elle a été obtenue pour les différents éléments (cylindre, B.C., S6) en les retirant tour à tour de la condition de déclenchement et en

comparant la réponse de cet élément à la prédiction tirée de l'interpolation (ou extrapolation) des traces reconstruites par ROMEO.

L'ensemble B.C + cylindre a une efficacité proche de 100 %. On l'a supposé parfaite dans la simulation. Celle des éléments du S6 va de 90 à 100 %.

Le positionnement exact des scintillateurs (en particulier la ligne médiane du S6), qui est important pour le calcul de l'acceptance a été déterminé par la même méthode.

Le compteur S6 a parfois donné un signal pour des traces traversant ses guides de lumière : les événements correspondants ont été rejetés a posteriori.

4.1.3.3. Efficacité de la chambre de coplanarité :

Elle a été étudiée en détail (secteur par secteur) car, pour éviter les signaux parasites, la chambre travaillait sous une tension légèrement inférieure à celle du plateau d'efficacité. En outre, les secteurs ont des formes et des surfaces diverses, qui affectent la hauteur et la forme du signal, et le réglage des amplificateurs (un par secteur) n'était pas parfaitement uniforme.

Des données ont été prises à 3 tensions différentes (2100, 2160 et 2200 V) et un lot de traces de bonne qualité sélectionnées pour être interpolées. L'efficacité a été paramétrisée, pour chaque secteur, en fonction de la tension, à partir d'une forme commune. La figure 4.1. donne les résultats de l'ajustement pour la tension 2160 V, la plus couramment utilisée lors de la prise de données. L'efficacité moyenne est supérieure à 80 %, et la moitié supérieure (secteurs 1 à 33) répondant mieux globalement que la moitié inférieure.

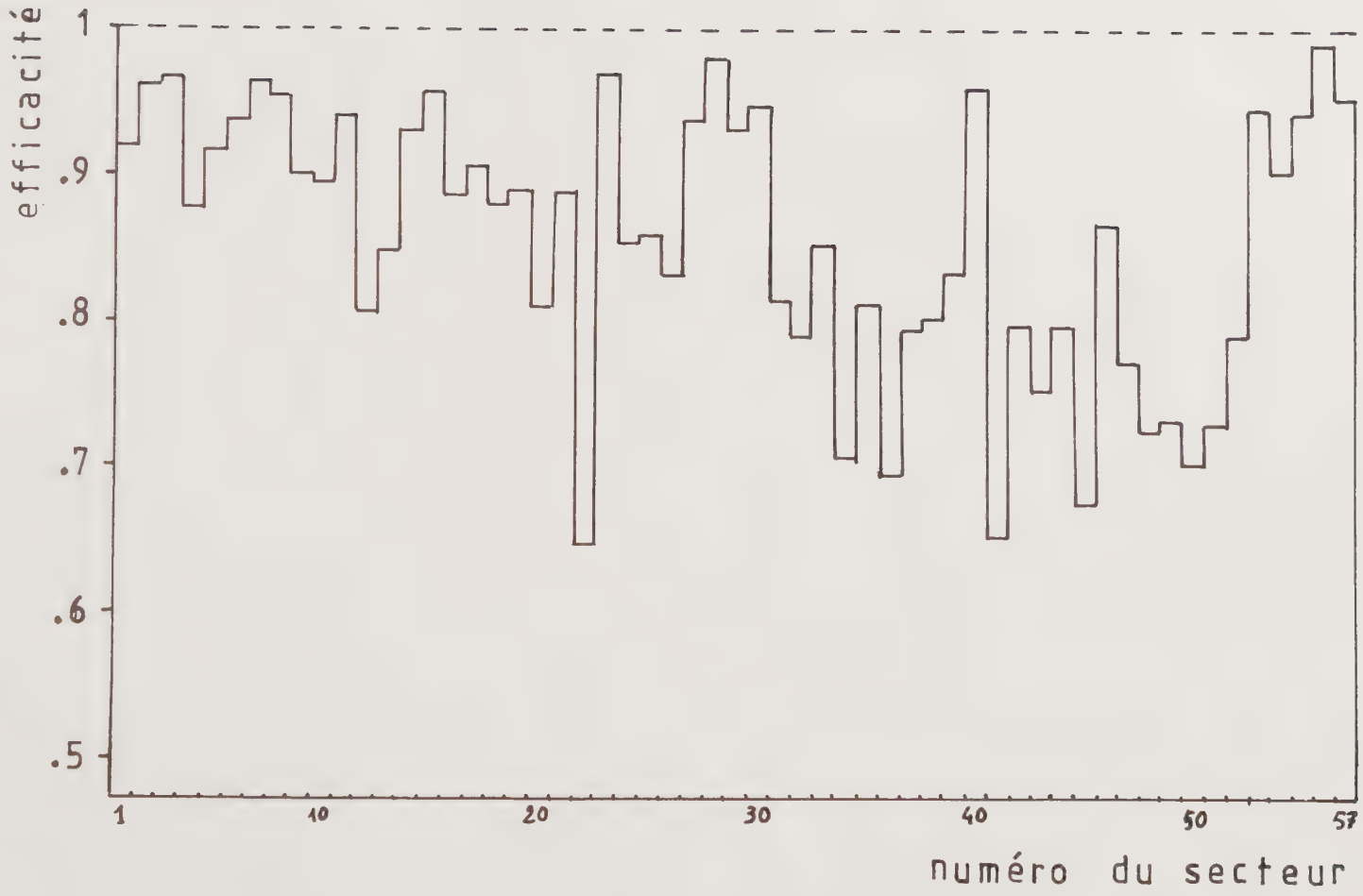


FIG. 4.1

Ces chiffres ont été introduits dans la simulation en même temps qu'une courbe de diaphonie obtenue en cumulant les réponses de tous les secteurs, et déjà représentée sur la fig. 1.6.

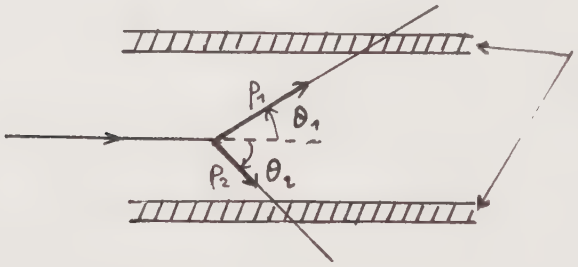
4.1.4. Pertes dues aux interactions secondaires.

Les particules sortantes traversent de la matière avant de parvenir dans les modules optiques de la Géométrie I : l'hydrogène et l'enveloppe de la cible, les scintillateurs (B.C. et cylindre), puis les chambres de la Géométrie II. Pour une traversée perpendiculaire, cette matière représente environ une longueur d'interaction pour 1 barn de section efficace par nucléon : les traces ayant généralement une incidence très oblique, la probabilité d'une réinteraction n'est donc pas négligeable. Sauf si elle est élastique vers l'avant, elle aboutit au rejet de l'événement, soit par la logique de déclenchement, soit par la reconstruction géométrique et cinématique : il nous faut donc évaluer une longueur d'interaction intermédiaire entre la longueur d'absorption (qui ne tient compte que des interactions inélastiques) et la longueur de collision (qui tient compte de toutes les interactions).

Les sections efficaces sur les différents noyaux rencontrés ne sont pas connues en détail ; en outre elles dépendent de l'impulsion et ont des structures tourmentées à basse impulsion (jusque vers 2 GeV/c) s'il peut se former des résonances. Nous avons choisi une paramétrisation simplifiée, à partir de moyennes des sections efficaces sur proton et neutron : une variation linéaire en-dessous de 5 GeV/c, puis une valeur constante au-delà, conformément au tableau suivant :

Particule		p	K^+	π^+	$\bar{p}$	K^-	π^-
Section efficace par nucléon (m barn)	Extrap. à 0	45	15	25	100	25	30
	5 GeV/c	30	15	25	45	20	25

L'épaisseur de matière traversée ne dépend que des angles d'incidence, qui sont pour la plupart fonction de l'angle θ_{cm} seul (sauf l'épaisseur d'hydrogène, et la matière traversée en Géométrie II, qui sont des contributions mineures). Les impulsions des particules sortantes sont, elles aussi, calculables à partir de θ_{cm} , et on peut donc calculer approximativement à chaque énergie et pour chaque réaction la probabilité qu'il y ait une réinteraction fatale sur au moins une des traces sortantes :



matière traversée équivalente à une épaisseur ℓ , pour une longueur d'interaction L_{int}

$$\text{Prob (réinteraction)} = 1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

avec
$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\ell}{L_{int}(p_1)\ \sin\theta_1} \\ \alpha_2 = \dfrac{\ell}{L_{int}(p_2)\ \sin\theta_2} \end{cases}$$

La figure 4.2. donne les résultats de ce calcul : on voit que la perte peut dépasser 20 % à 12 GeV/c.

4.1.5. Dénombrement des événements.

Les coupures décrites au chapitre 2 ne suppriment, en principe, qu'un nombre négligeable de bons événements. Par ailleurs, un passage du programme ROMEO sur des événements simulés suggère une efficacité de reconstruction (vertex compris) supérieure à 95 % pour tous les événements à deux traces chargées ; mais la simulation ne tient pas compte de toutes les perturbations possibles.

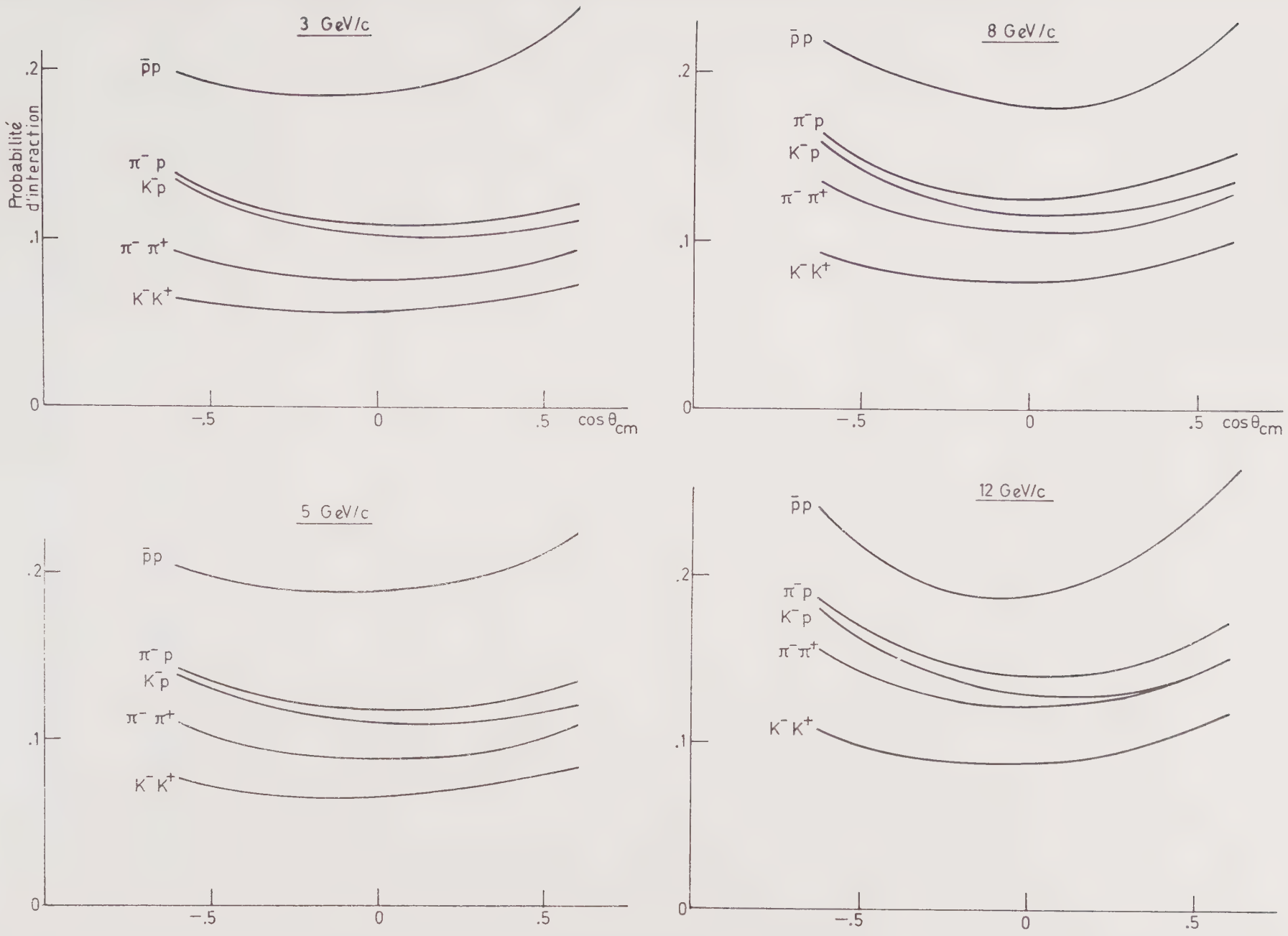

3 GeV/c
8 GeV/c
5 GeV/c
12 GeV/c
Probabilité d'interaction
p̄p
π⁻ p
K⁻p
π⁻ π⁺
K⁻K⁺
.2
.1
0
-.5
0
.5
cos θcm

FIG 4.2

Un examen visuel des événements bruts comparés aux reconstructions de ROMEO confirme que celui-ci reconnaît pratiquement toutes les traces sortantes (authentifiées par un signal dans C.C. ou la B.C.), au moins sur une portion de leur trajet. Par contre, il existe, en dehors des coupures cinématiques, des pertes à la reconstruction des vertex dues à un mauvais ajustement (cf. 2.3.2.). Une partie de ces vertex a pu être récupérée en redéfinissant les paramètres du faisceau ; pour les autres, nous avons évalué les pertes résiduelles à 8 ± 5 % (sauf à 5 GeV/c, où elles s'élèvent à 12 ± 5 %). La grande incertitude attribuée à ce pourcentage tient au fait que les pertes dépendent sans doute de θ_{cm} , ce dont nous n'avons pas tenu compte.

Pour obtenir un lot assez pur d'événements pour une réaction donnée, on fait une coupure en δm^2 (variable définie en 2.4.2.), qui englobe la quasi-totalité du pic, suivant le tableau suivant :

Impulsion	3	5	8	12
$\lvert\delta m^2\rvert_{max}$	0.05	0.08	0.20	0.20

Ce lot sert à déterminer les distributions angulaires représentées sur la fig. 4.3., et à réaliser les ajustements par maximum de vraisemblance.

Pour s'assurer que ces distributions ne sont pas faussées par la présence du fond, on procède de la manière suivante : on sélectionne les événements dans un intervalle de δm^2 de part et d'autre de l'intervalle défini ci-dessus et on calcule pour eux un θ_{cm} comme pour les événements retenus. En admettant que la distribution en θ_{cm} ne varie pas beaucoup avec δm^2 , on peut évaluer la contribution du fond dans l'intervalle retenu en interpolant celle qu'on trouve de part et d'autre, proportionnellement à l'intervalle en δm^2 (voir fig. 4.3.).

On constate que le fond ainsi défini reste très inférieur à la distribution retenue, dans tous les intervalles en $\cos\theta_{cm}$ (pollution de 10 % au maximum).

Pour obtenir une normalisation du nombre d'événements élastiques (d'où une pondération des événements retenus), on soustrait ce fond interpolé globalement (et non par intervalles en $\cos\theta_{cm}$). Cette méthode n'est pas très précise, mais son imprécision est de toute façon inférieure à celle existant déjà sur la normalisation, et son gros avantage est d'éviter toute hypothèse sur la forme du pic en δm^2.

Une coupure en probabilité du χ^2 de l'ajustement cinématique (cf. 3.4.1.) pourrait éliminer plus complètement le fond ; on s'aperçoit cependant qu'une coupure à 0.01 diminue d'environ 10 % les pics élastiques (fond soustrait) et que la distribution en δm^2 des événements rejetés (cf. fig. 3.3.) présente un pic à $\delta m^2 \simeq 0$, au moins à 3 et 5 GeV/c et à 12 GeV/c pour π^-p et $\bar{p}p$; à 12 GeV/c, il y a aussi accumulation d'événements à faible probabilité dans la zone correspondant à $\bar{p}p \longrightarrow \pi^-\pi^+$. Ceci montre que les événements à basse probabilité ne viennent pas que du fond ; la distribution en probabilité des événements élastiques, bien qu'à peu près uniforme ailleurs (voir fig. 4.4.), doit donc présenter un pic aux basses probabilités, qui est indiscernable du pic dû au fond. Nous discutons dans l'annexe 3 différentes raisons pouvant expliquer une telle distribution.

Il en résulte qu'on ne peut supposer une distribution plate pour pondérer une coupure en probabilité : il faudrait avoir recours à un dénombrement d'événements dans un pic, tout comme dans la méthode de sélection adoptée. On n'est pas sûr non plus que la pondération ne dépend pas de θ_{cm} , donc qu'une coupure en probabilité donne une distribution angulaire sans biais.

En pratique, la distribution angulaire obtenue avec une coupure en probabilité à 0.01 est très semblable à celle qu'on obtient sans coupure, ce qui augmente la confiance qu'on peut accorder à cette distribution.

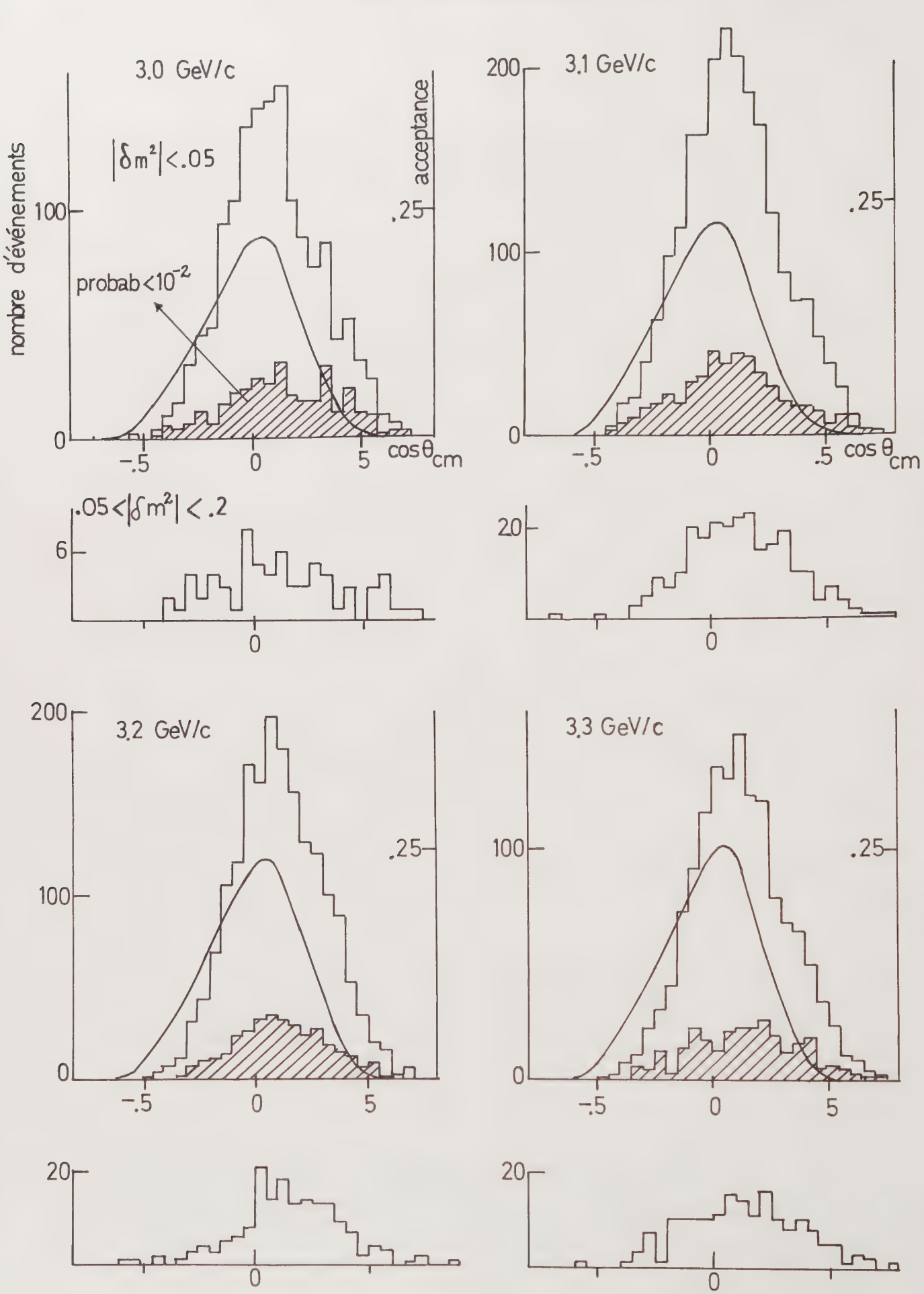

p̄ p DISTRIBUTIONS ANGULAIRES
3.0 GeV/c
3.1 GeV/c
3.2 GeV/c
3.3 GeV/c
nombre d'événements
acceptance
|δm²|<.05
probab<10⁻²
.05<|δm²|<.2
cos θcm

FIG. 4.3 (a)

$\bar{p}$ p DISTRIBUTIONS ANGULAIRES

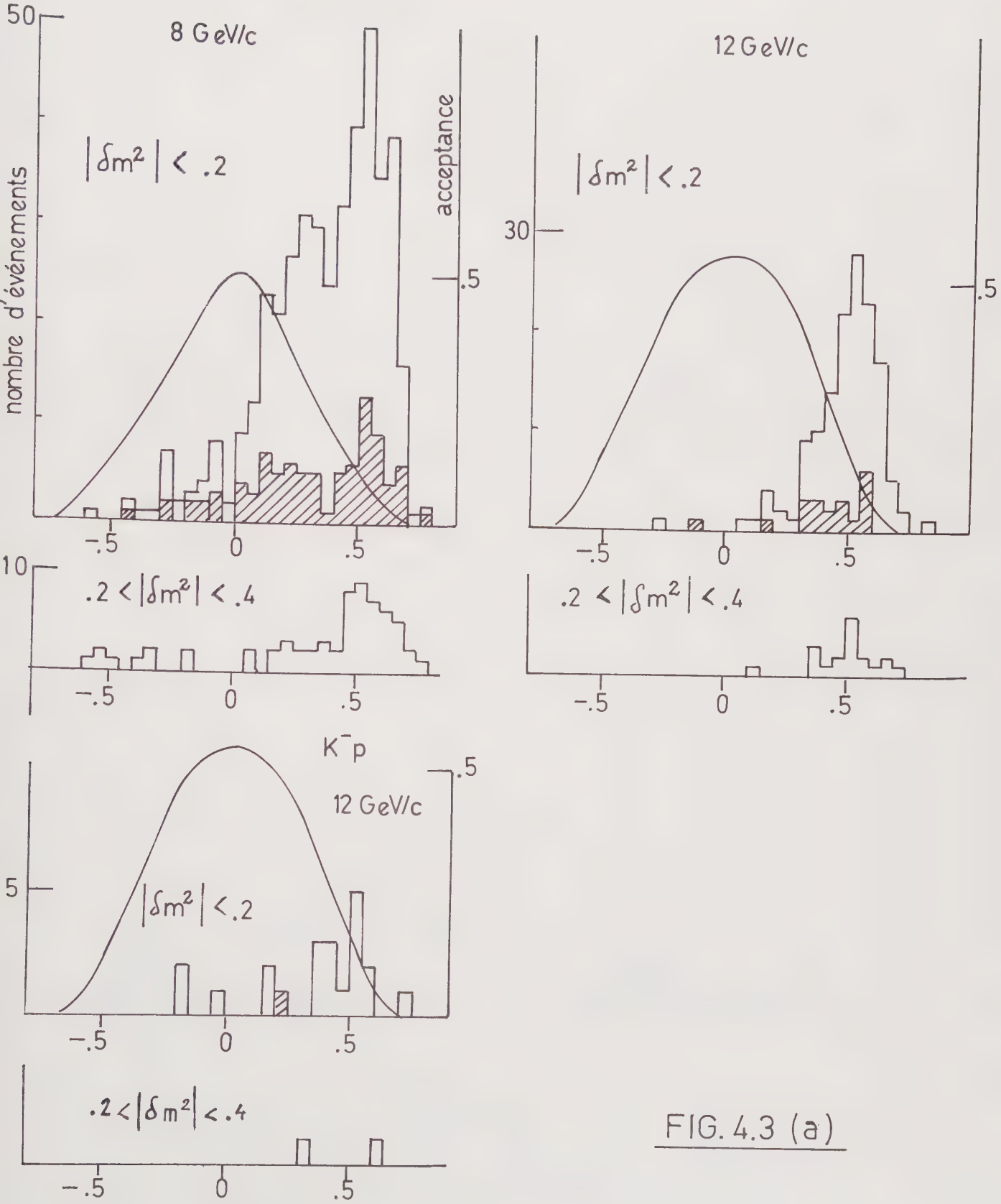


FIG. 4.3 (a)

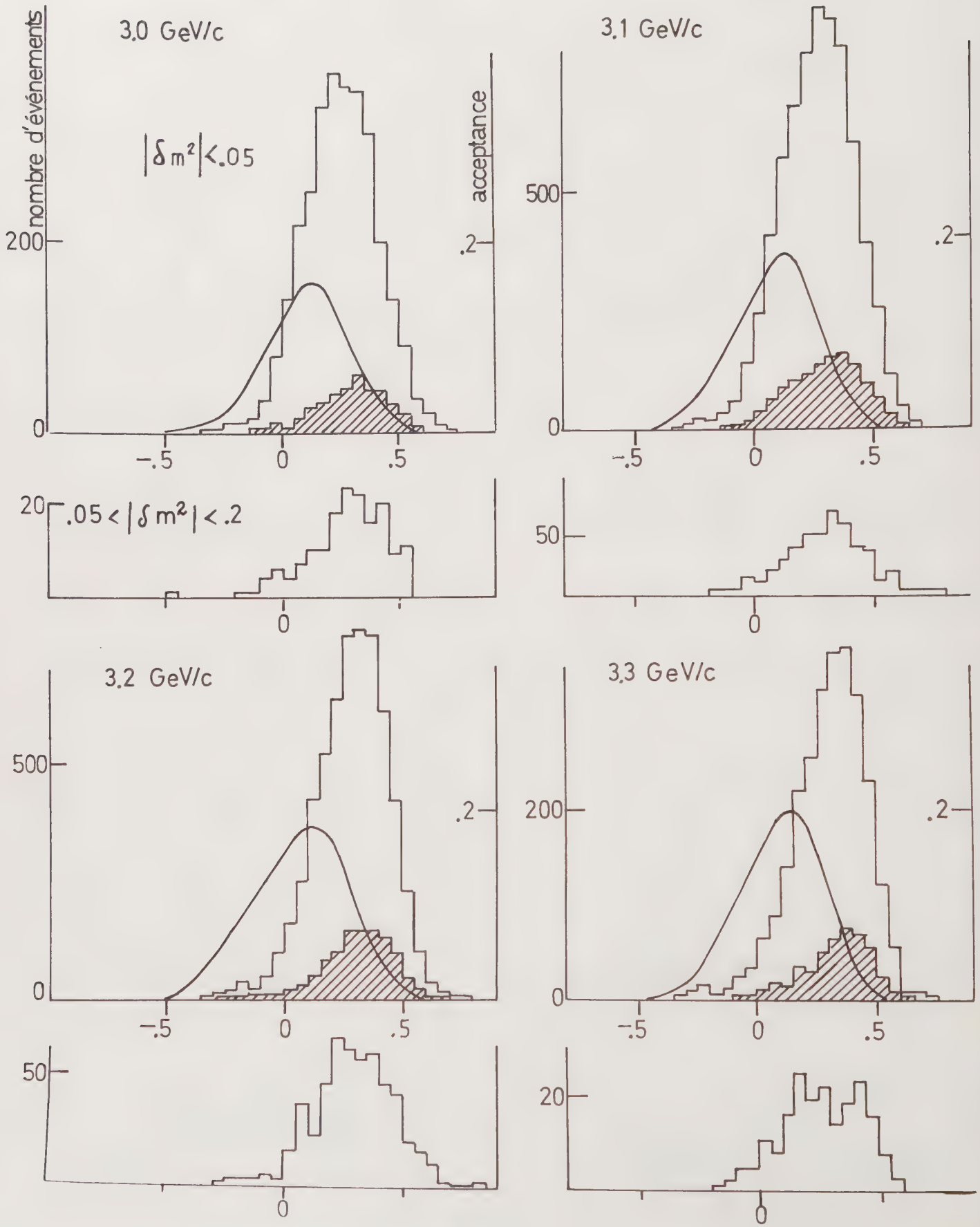

$\pi^- p$ DISTRIBUTIONS ANGULAIRES
3.0 GeV/c
3.1 GeV/c
3.2 GeV/c
3.3 GeV/c
nombre d'événements
acceptance
$|\delta m^2| < .05$
$.05 < |\delta m^2| < .2$
200
500
50
20
0
.2
-.5
.5

FIG. 4.3 (b)

$\pi^- p$ DISTRIBUTIONS ANGULAIRES

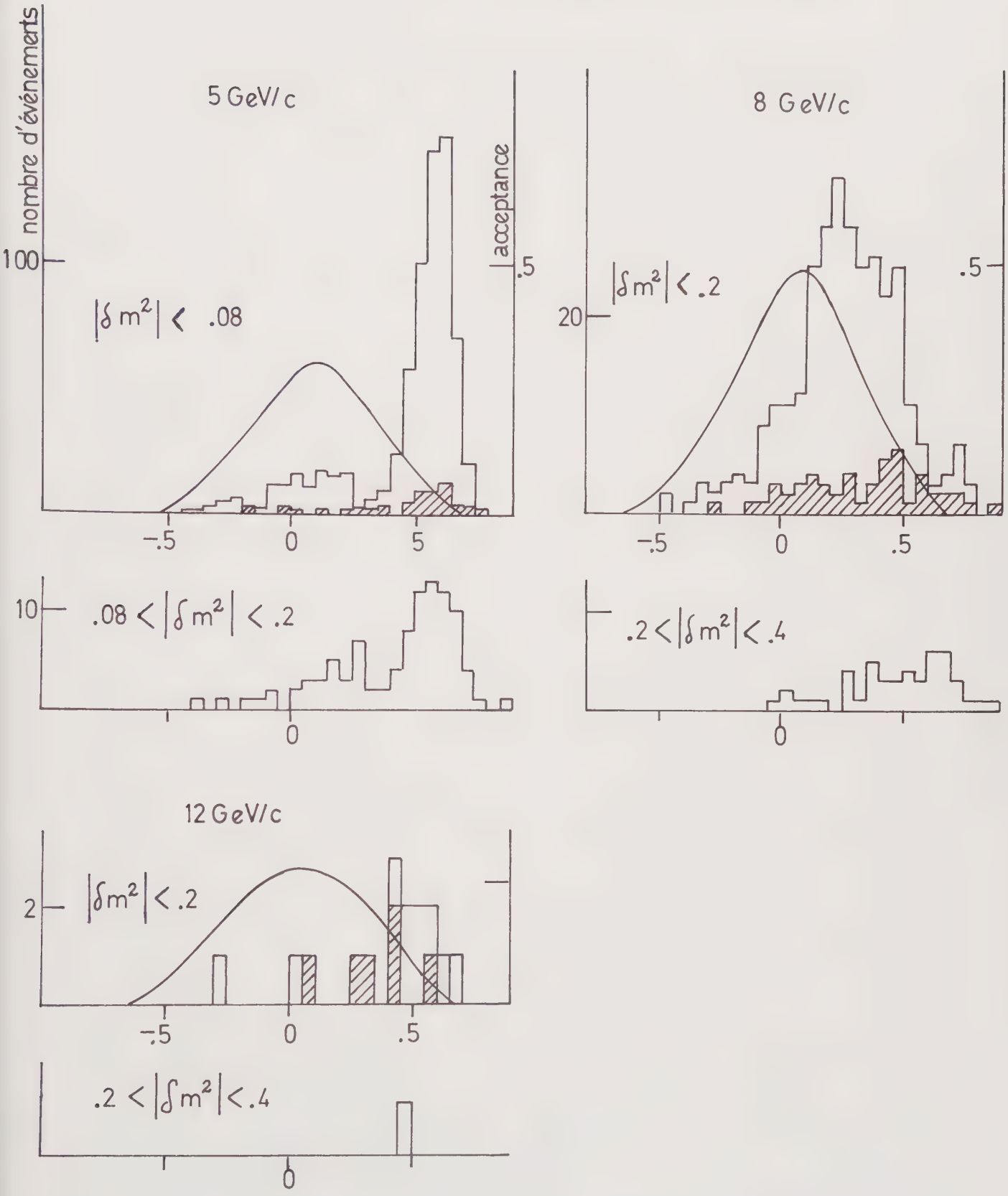


FIG. 4.3 (b)

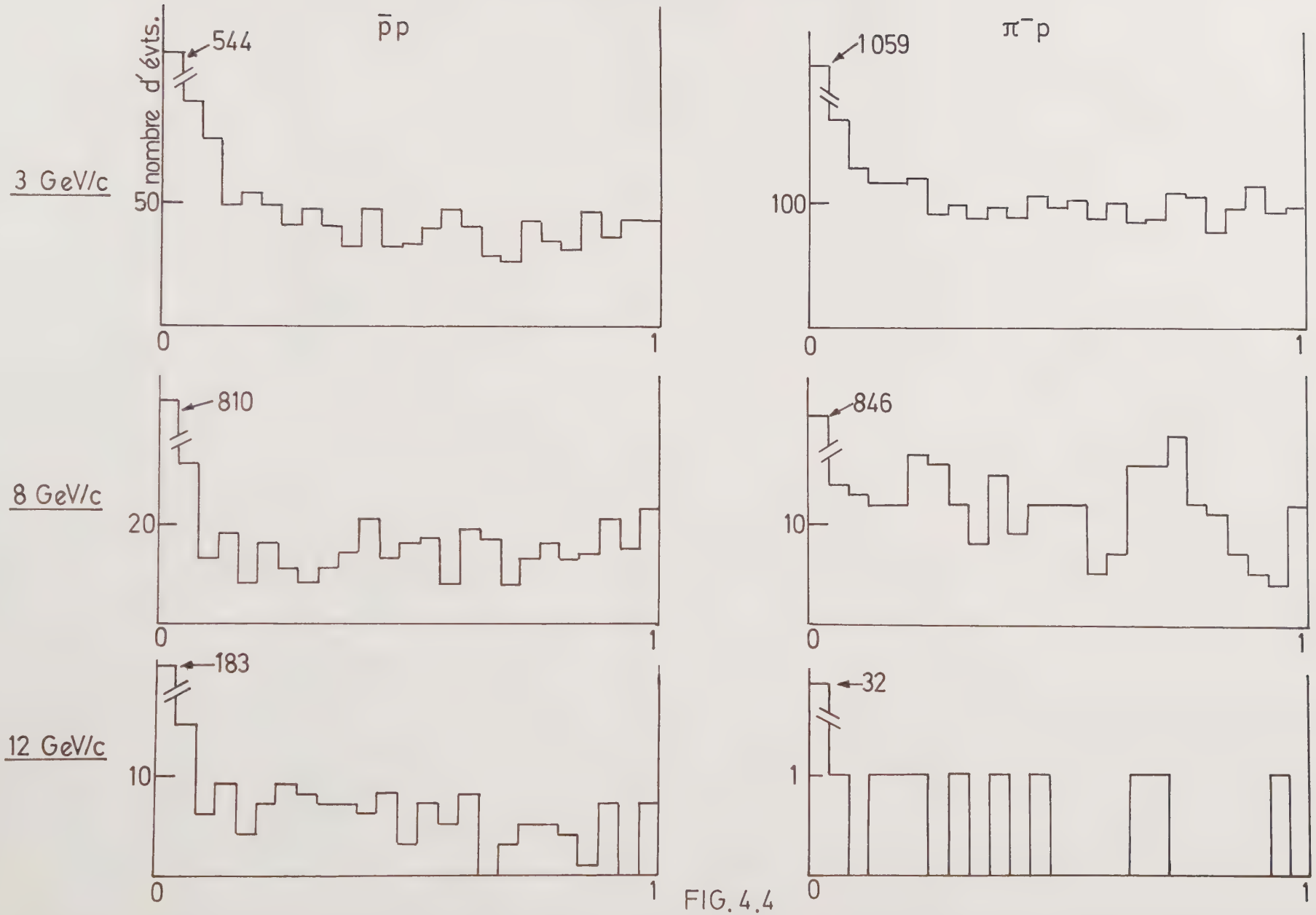

PROBABILITE AJUSTEMENT 3c
$\bar{p}p$
$\pi^- p$
nombre d'évts.
3 GeV/c
8 GeV/c
12 GeV/c
544
1059
810
846
183
32
50
100
20
10
10
1
0
1

FIG. 4.4

Pour les réactions $\bar{p}p \to K^-K^+$ et $\pi^-\pi^+$ le problème se pose différemment : il s'agit de quelques événements isolés, pour lesquels les critères évoqués ci-dessus n'ont plus de sens. Ils seront discutés à part dans le paragraphe suivant.

4.1.6. Contrôles de la simulation :

Pour voir si les ingrédients de cette simulation représentent assez bien la réalité, on compare les distributions de certaines grandeurs prédites par la simulation avec les distributions réellement observées sur les événements élastiques sélectionnés. Il s'agit de :

— la distribution en x, y, z des vertex (fig. 4.5.). La distribution en x présente une décroissance vers l'amont (acceptance limitée du S6 et de la C.C.) et une autre plus abrupte vers l'aval (influence du veto E.C). Les distributions en y et z reflètent celles du faisceau, à l'exception d'une coupure assez brutale en z due au niveau d'hydrogène.

— la distribution en angle azimuthal du plan de réaction (fig. 4.5.), rendue fortement anisotrope par le champ magnétique et la forme rectangulaire des surfaces sensibles du S6 et de la C.C.

— la distribution des secteurs touchés de la C.C. (fig. 4.6.) anisotrope comme l'angle azimuthal, et modulée en plus par l'efficacité variable des différents secteurs.

Comme l'acceptance, pour une position donnée du vertex et pour un azimuth donné dépend assez fortement de θ_{cm}, il faudrait pour être complet ventiler les événements élastiques suivant la valeur de θ_{cm} pour les comparer aux événements simulés ; cela donnerait des lots trop peu nombreux dans la région située autour de 90° et au-delà, qui est justement la plus importante pour nous. On a donc introduit dans la simulation la dépendance angulaire en θ_{cm} déduite des résultats et fait des comparaisons globales.

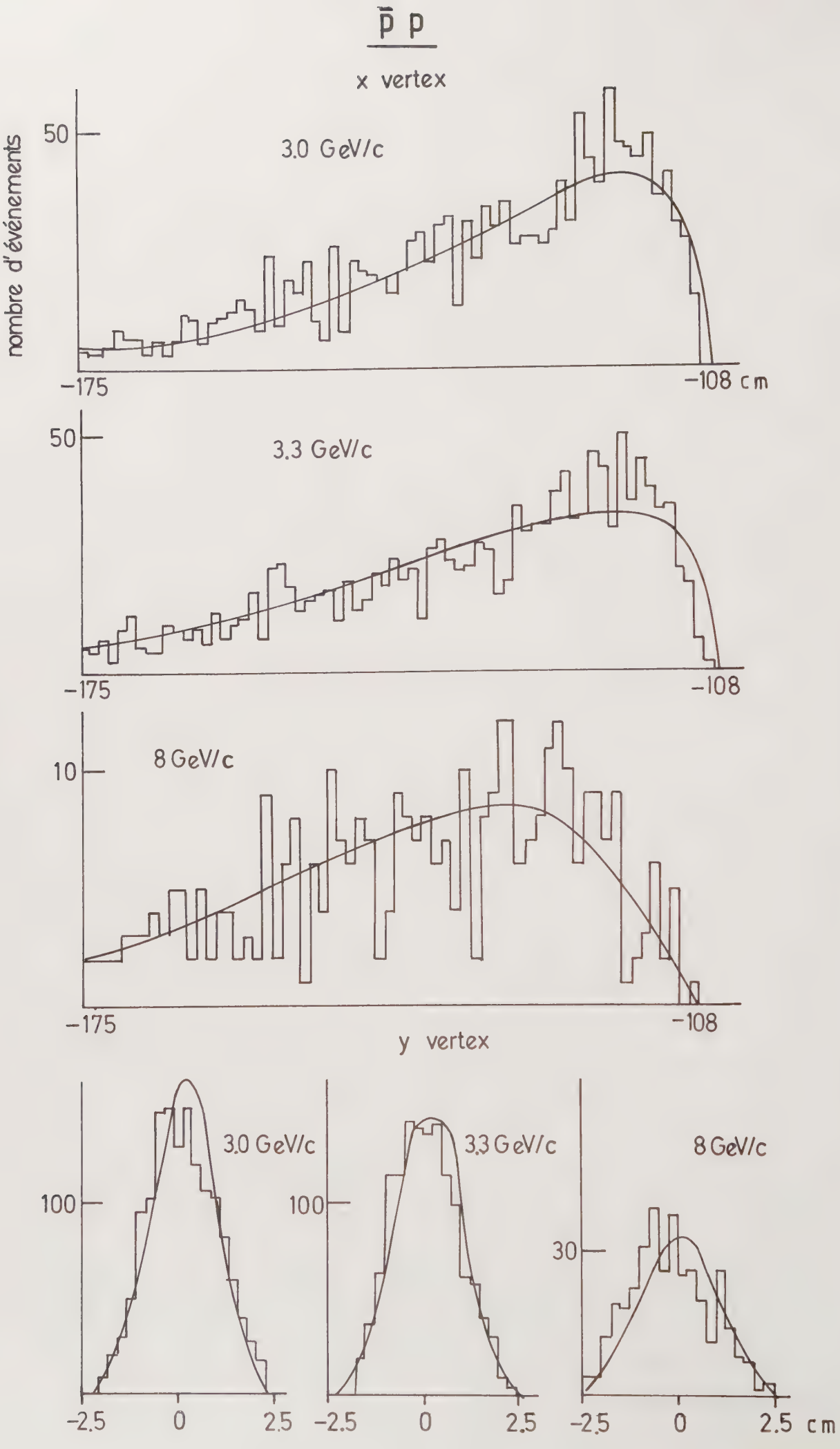

p̄ p
x vertex
nombre d'événements
50
3.0 GeV/c
-175
-108 cm
50
3.3 GeV/c
-175
-108
10
8 GeV/c
-175
-108
y vertex
100
3.0 GeV/c
-2.5
0
2.5
100
3.3 GeV/c
-2.5
0
2.5
30
8 GeV/c
-2.5
0
2.5 cm

FIG.4.5 (a)

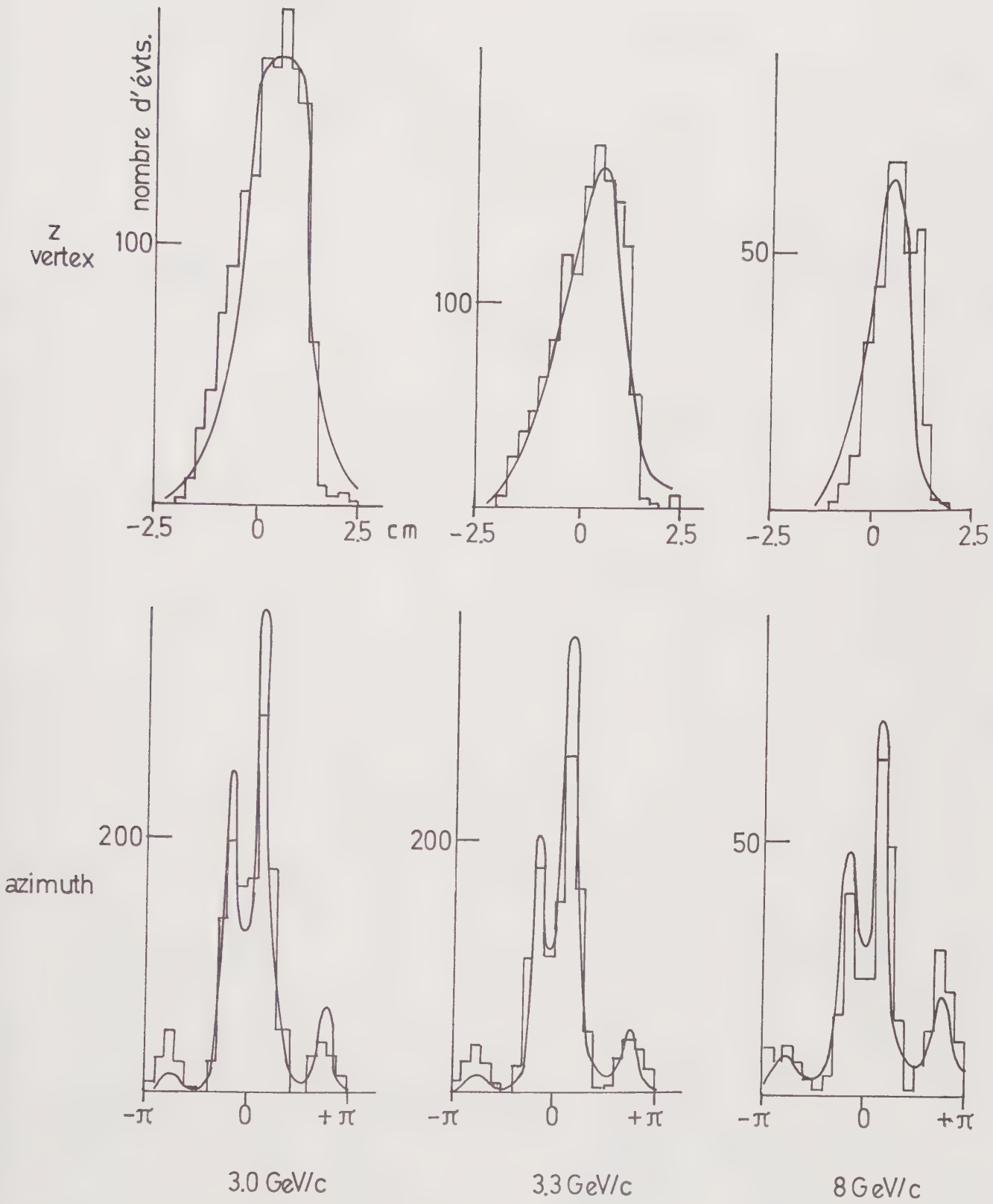

z vertex
nombre d'évts.
100
-2.5
0
2.5 cm
100
-2.5
0
2.5
50
-2.5
0
2.5
azimuth
200
-π
0
+π
200
-π
0
+π
50
-π
0
+π
3.0 GeV/c
3.3 GeV/c
8 GeV/c

FIG. 4.5 (a)

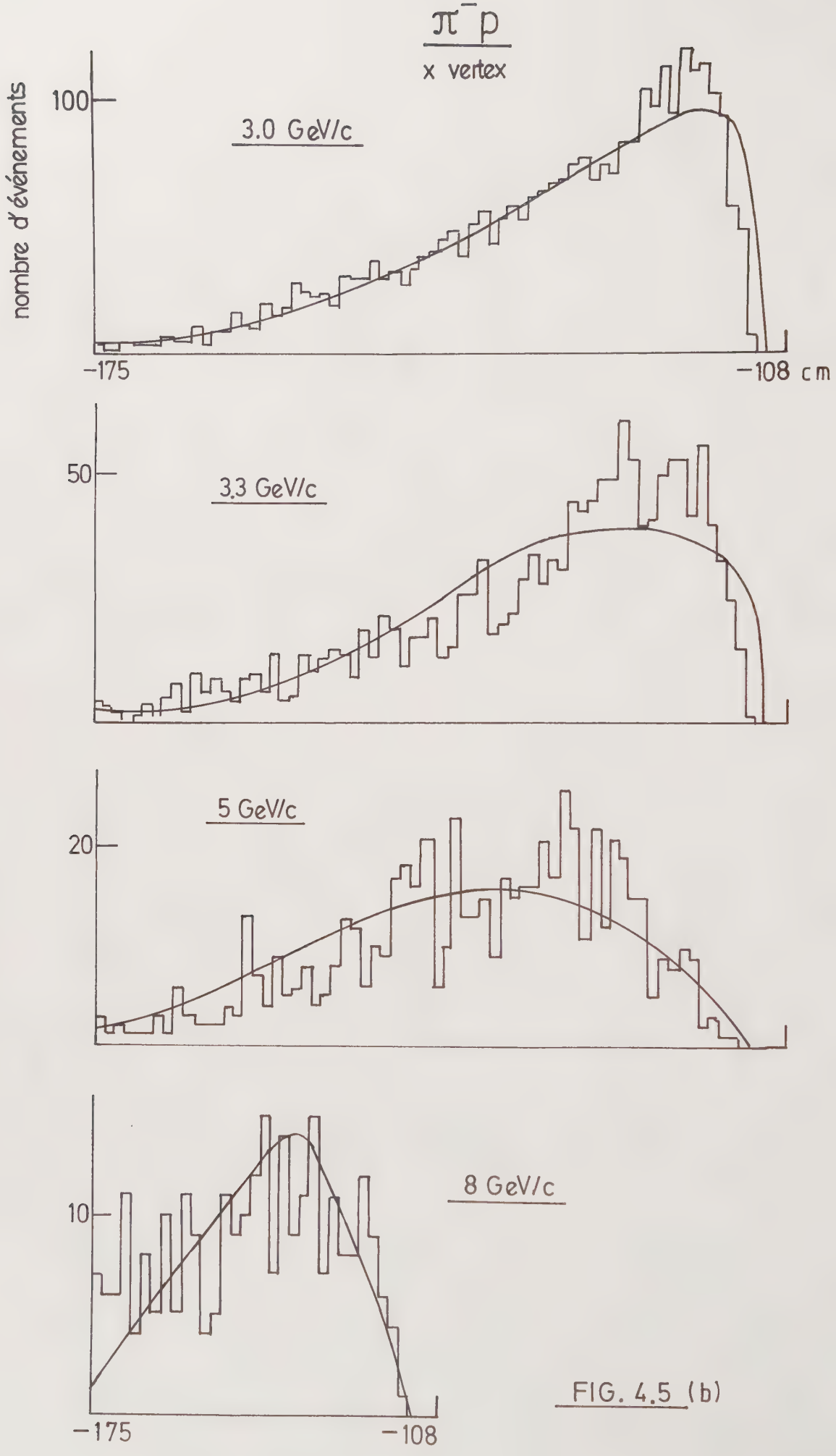

π⁻p
x vertex
nombre d'événements
100
3.0 GeV/c
−175
−108 cm
50
3.3 GeV/c
20
5 GeV/c
10
8 GeV/c
−175
−108

FIG. 4.5 (b)

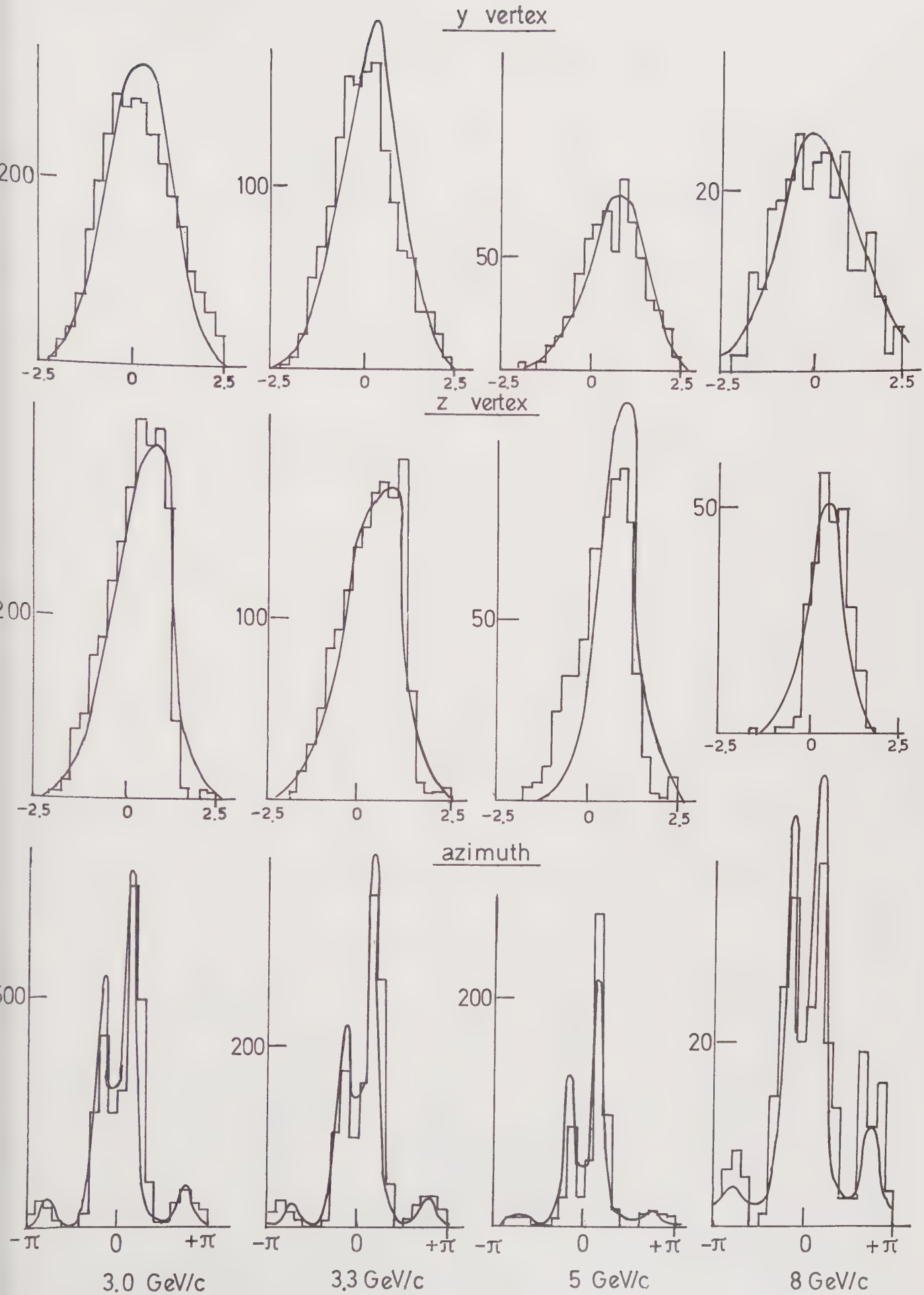

y vertex
z vertex
azimuth
200
100
50
20
-2.5
0
2.5
-π
+π
3.0 GeV/c
3.3 GeV/c
5 GeV/c
8 GeV/c

FIG. 4.5 (b)

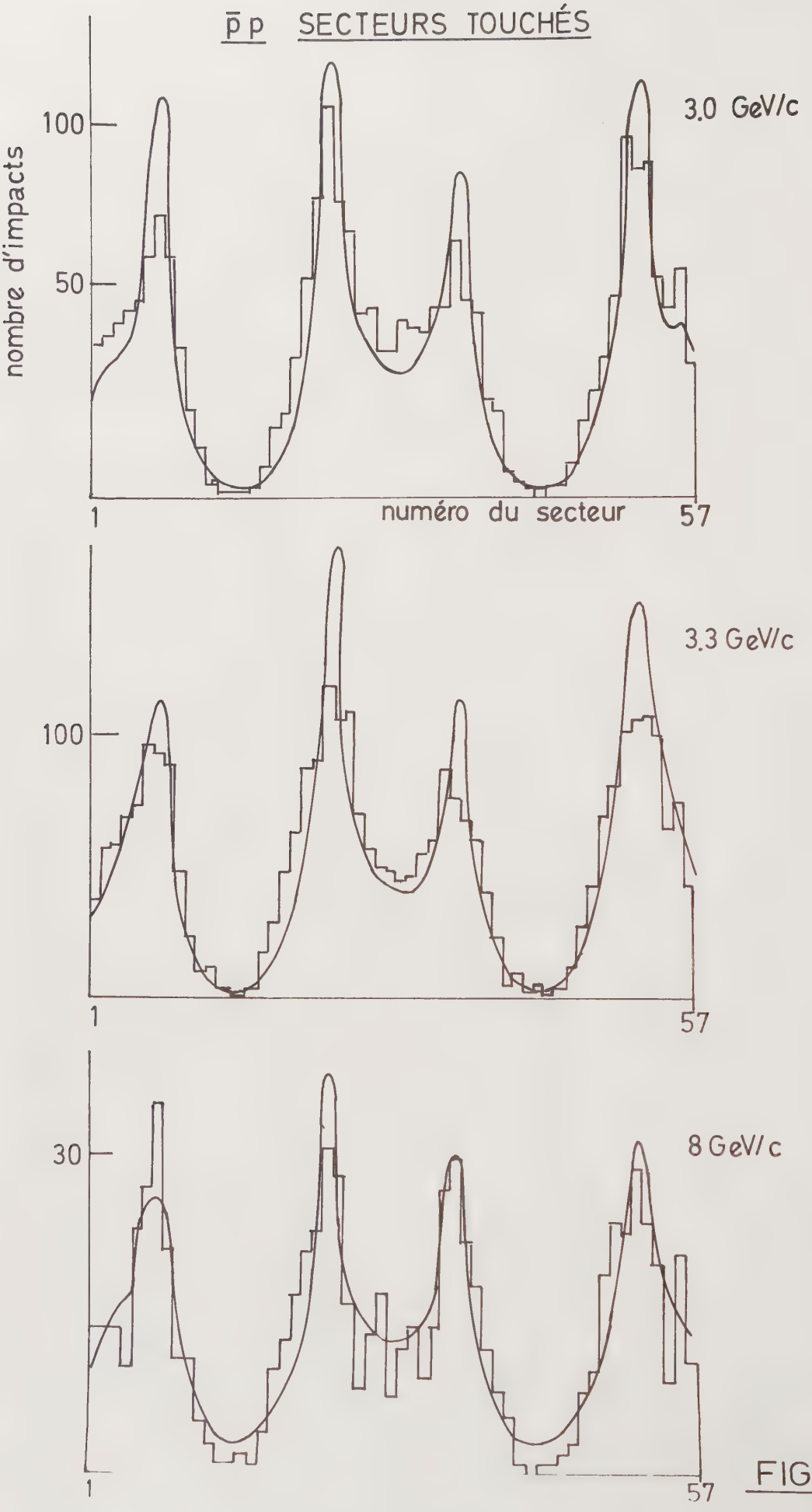

p̄ p SECTEURS TOUCHÉS
nombre d'impacts
100
50
1
numéro du secteur
57
3.0 GeV/c
100
1
57
3.3 GeV/c
30
1
57
8 GeV/c

FIG. 4.6

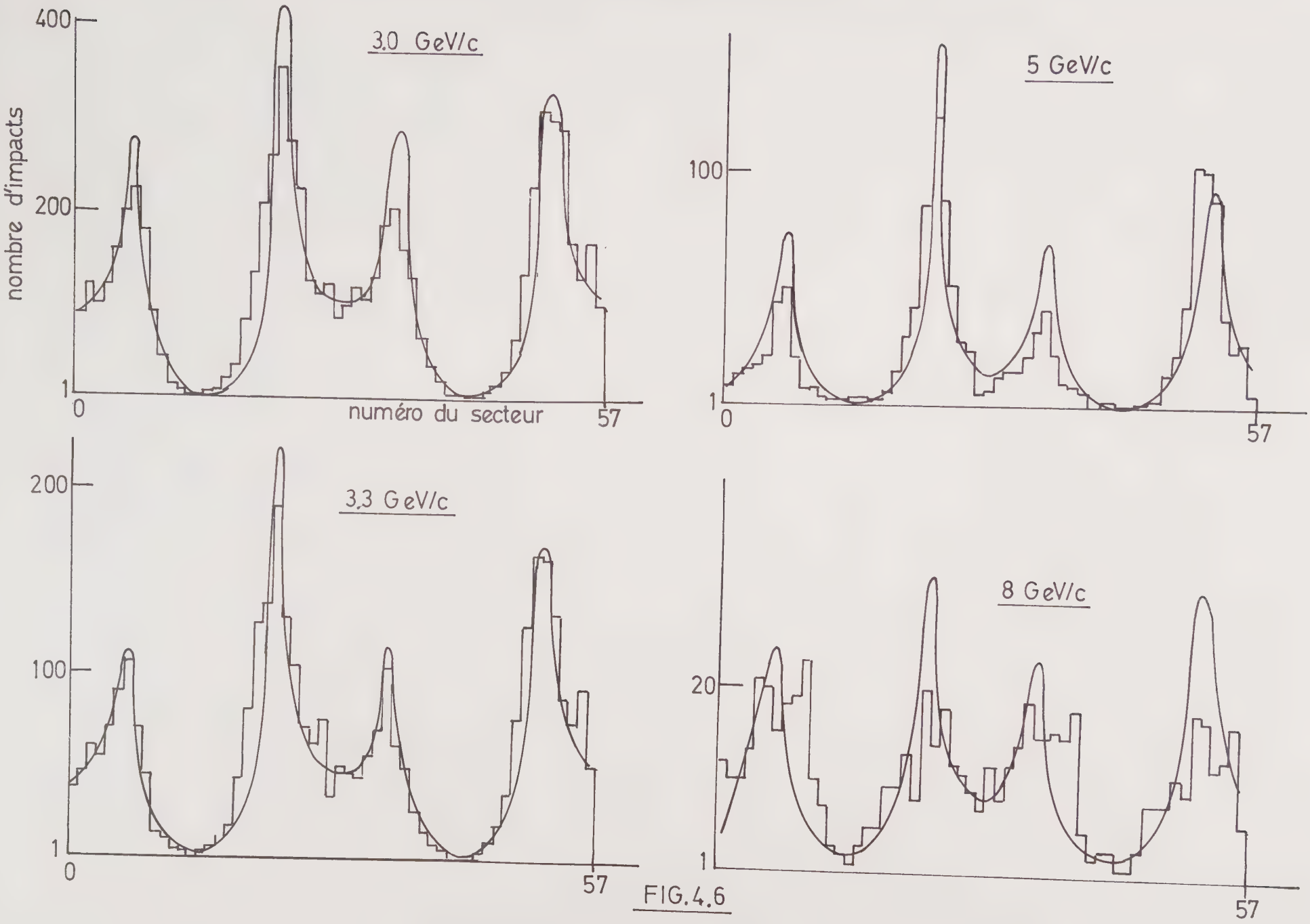

π⁻p SECTEURS TOUCHÉS
3.0 GeV/c
5 GeV/c
3.3 GeV/c
8 GeV/c
nombre d'impacts
numéro du secteur
400
200
100
20
1
0
57

FIG.4.6

Ces comparaisons sont, dans l'ensemble, satisfaisantes.

On peut aussi calculer le nombre moyen de secteurs touchés par événement élastique dans la C.C. Dans la simulation on trouve 2.15 ± 0.01 et dans la réalité 2.21 ± 0.03. Ceci semble indiquer que le taux de diaphonie était un peu plus important que prévu, à moins que l'excès ne soit dû à des signaux fortuits sur des secteurs adjacents à des secteurs réellement touchés, donnant des configurations admises par la logique (les signaux fortuits sur d'autres secteurs entraînant le rejet par la logique de déclenchement).

4.2. RESULTATS.

4.2.1. Réactions élastiques :

Les sections efficaces des réactions élastiques sont données dans le tableau 4.1., par intervalles de $\cos \theta_{cm}$. Elles sont illustrées sur la fig. 4.7.

4.2.1.1. Evaluation des erreurs :

Dans le calcul des erreurs, on a tenu compte, outre l'incertitude statistique, de l'incertitude sur les différents facteurs entrant dans la normalisation. Certains de ces facteurs (en particulier le comptage des particules incidentes) sont les mêmes pour tous les intervalles angulaires ; d'autres ont un caractère aléatoire, et quasi-gaussien (incertitude statistique sur la simulation) ; d'autres enfin sont difficiles à caractériser (pertes à la reconstruction). Il ne semble pas qu'on puisse isoler un facteur commun à toutes les impulsions pour une réaction donnée, ni à toutes les réactions pour une impulsion donnée.

Dans ces conditions, nous avons additionné quadratiquement toutes les incertitudes pour chaque intervalle en $\cos \theta_{cm}$, et nous ne donnons pas d'incertitude globale. Naturellement il est possible que des sources d'erreur nous aient échappé et les incertitudes données dans le tableau 4.1. doivent plutôt être considérées comme des limites inférieures.

4.2.1.2. Commentaires :

Des comparaisons sont possibles avec des expériences antérieures :

- à 5 GeV/c, l'accord sur $\pi^- p$ élastique est très bon avec l'ensemble des résultats /22/ sauf un /23/.
- à 8 GeV/c, nos résultats en $\pi^- p$ sont plutôt inférieurs à ceux de Jenkins et Price aux énergies voisines /24/ avec une structure un peu différente, et compatibles avec ceux de Chauveau /25/.

Il n'y a pas de résultats aux mêmes énergies que les nôtres pour $\bar{p} p$ élastique.

L'examen de la fig. 4.7. montre qu'il n'y a pas une distribution angulaire identique aux différentes énergies (même en excluant 3 GeV/c). Pour $\pi^- p$ en particulier, il existe un creux prononcé qui se situe à t constant, vers -3 $(GeV/c)^2$, qui doit donc être attribué à un processus périphérique plutôt qu'à une interaction dure entre constituants ; un autre creux semble aussi se manifester à -5 $(GeV/c)^2$.

Pour $\bar{p} p$ les choses sont moins nettes : à 3.3 GeV/c et, d'après /26/, à 5 GeV/c, on observe un épaulement vers $t = -2.5 (GeV/c)^2$. Aux énergies supérieures, on peut aussi soupçonner une succession d'épaulements et de creux.

Ainsi, il n'est pas certain que nous ayons accès à une région où l'amplitude due aux collisions dures soit vraiment dominante. On peut essayer de se limiter aux régions à grand $|t|$, mais la limite est arbitraire et, dans ces régions, une distribution angulaire débarrassée des structures à t constant ne peut pas être définie de façon précise. En outre, les événements y sont peu nombreux.

Ces réserves faites, on peut admettre que l'allure générale est grossièrement la même d'une impulsion à l'autre.

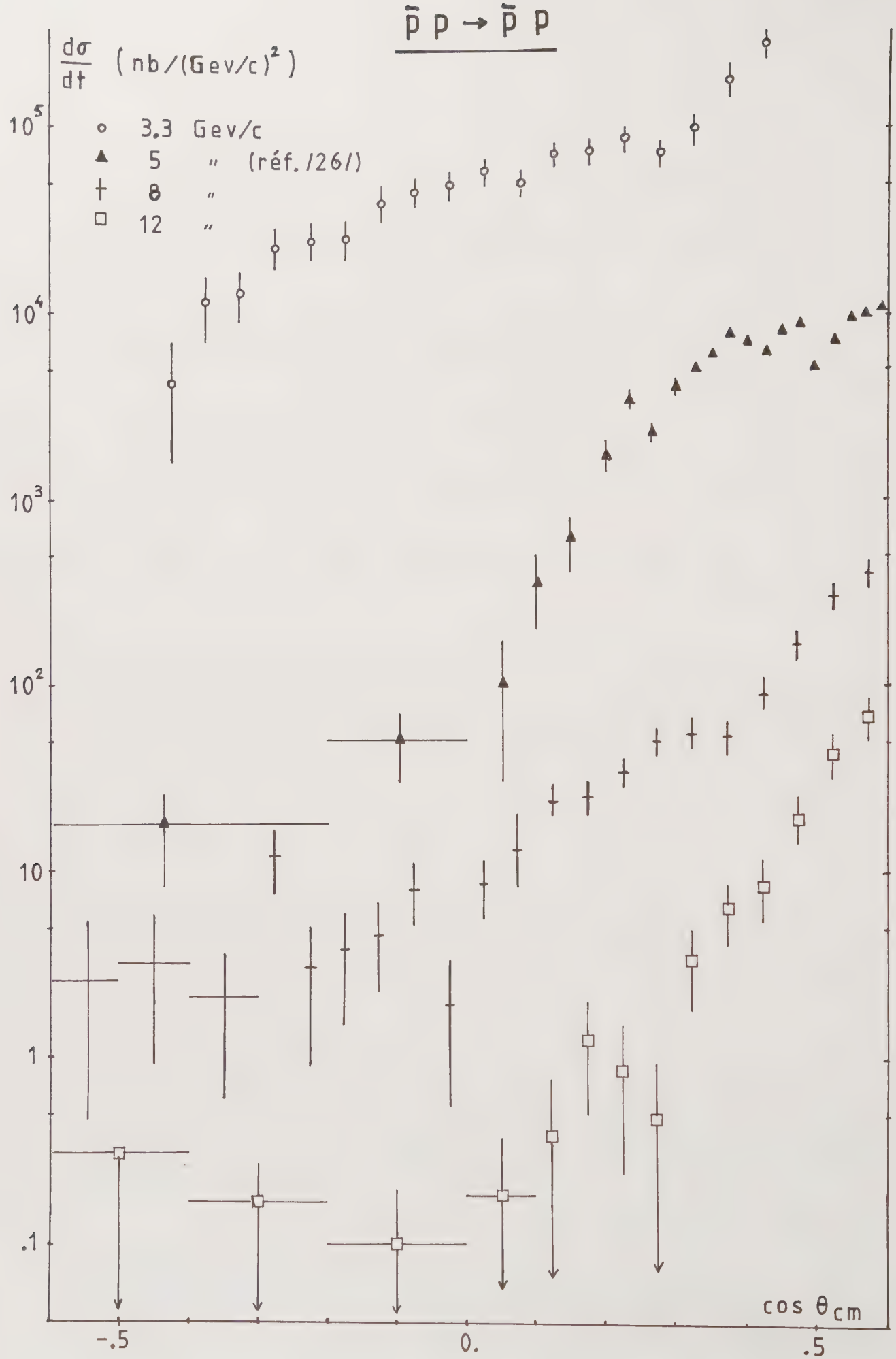

$\bar{p}\,p \rightarrow \bar{p}\,p$
$\frac{d\sigma}{dt}$ (nb/(Gev/c)^2)
3.3 Gev/c
5 " (réf./26/)
8 "
12 "
10^5
10^4
10^3
10^2
10
1
.1
-.5
0.
.5
cos θ_{cm}

FIG. 4.7 (a)

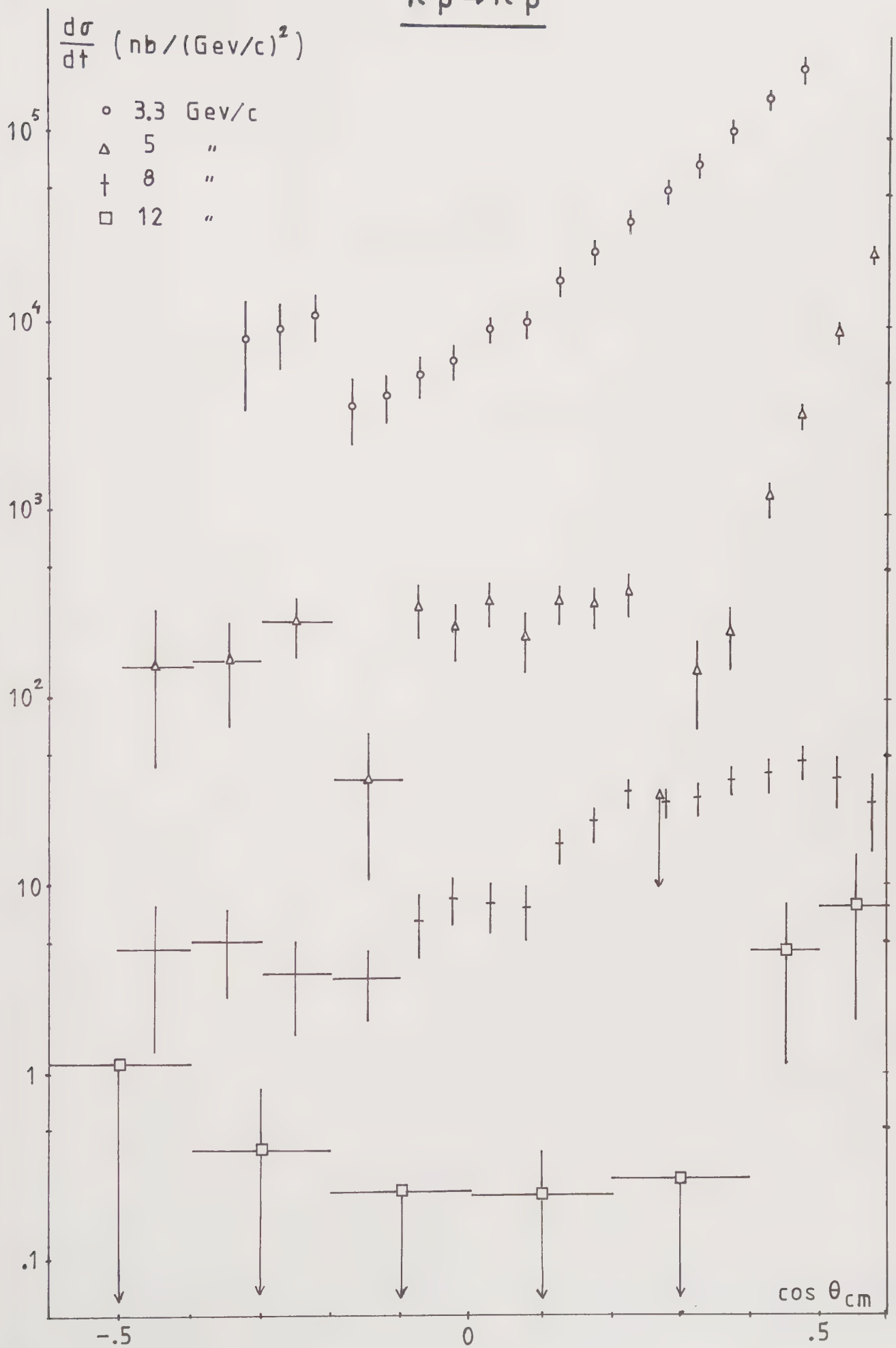

$\pi^- p \to \pi^- p$
$\frac{d\sigma}{dt}$ (nb/(Gev/c)^2)
○ 3.3 Gev/c
△ 5 "
† 8 "
□ 12 "
10^5
10^4
10^3
10^2
10
1
.1
-.5
0
.5
cos θ_{cm}

FIG 4.7 (a)

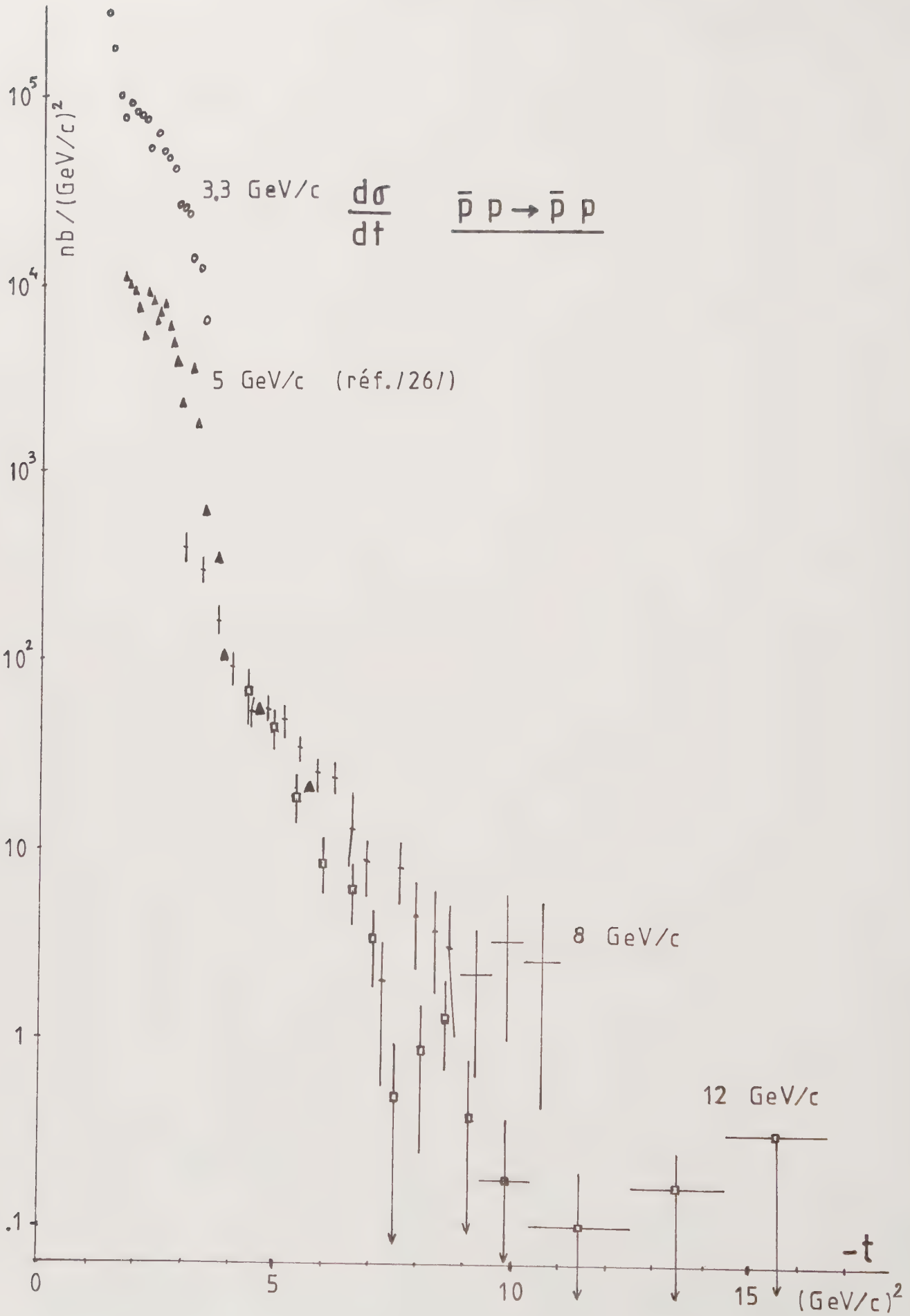

10^5
10^4
10^3
10^2
10
1
.1
nb/(GeV/c)^2
3,3 GeV/c
$\frac{d\sigma}{dt}$
$\bar{p}\,p \rightarrow \bar{p}\,p$
5 GeV/c (réf./26/)
8 GeV/c
12 GeV/c
0
5
10
15
-t
(GeV/c)^2

FIG. 4.7 (b)

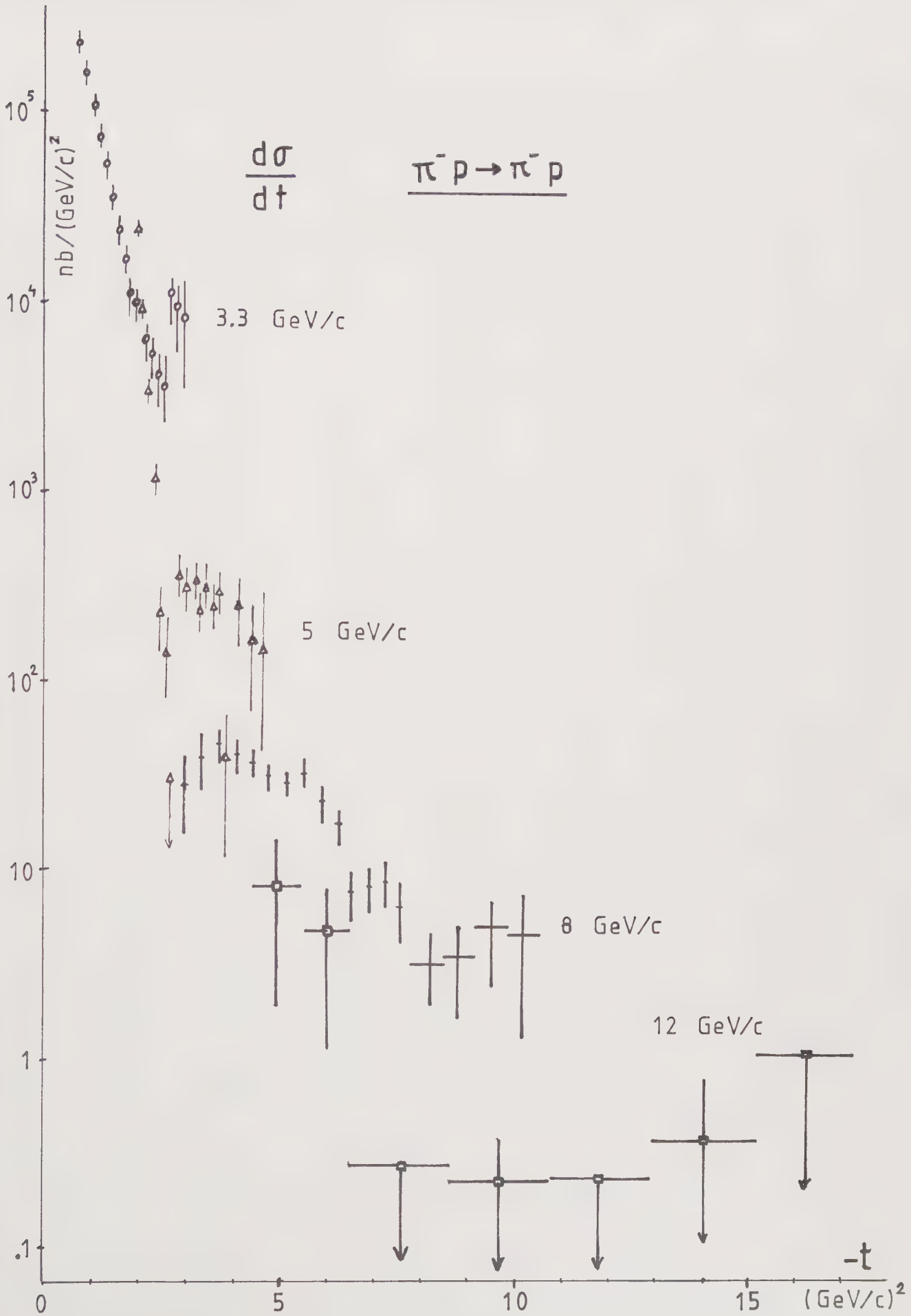

$\frac{d\sigma}{dt}$
$\pi^- p \to \pi^- p$
nb/(GeV/c)²
10^5
10^4
10^3
10^2
10
1
.1
3.3 GeV/c
5 GeV/c
8 GeV/c
12 GeV/c
-t
0
5
10
15
(GeV/c)²

FIG. 4.7 (b)

TABLEAU 4.1. — SECTIONS EFFICACES DIFFÉRENTIELLES $\frac{d\sigma}{dt}$ (μ barn /(GeV/c)^2)

$\bar{P}P \rightarrow \bar{P}P$

$\cos\theta_{cm}$	3.0 GeV/c	3.1 GeV/c	3.2 GeV/c	3.3 GeV/c
- .5	0 ± 11.6	0 ± 5.1	6.3 ± 6.3	0 ± 6.6
- .45	19.9 11.9	5.4 3.9	6.9 4.1	6.5 4.7
- .4	18.2 9.5	20.8 7.3	13.8 5.6	7.8 4.7
- .35	39.5 13.3	18.1 6.4	15.9 5.5	9.3 4.4
- .3	74.3 18.8	31.7 8.2	30.4 7.5	28.6 8.4
- .25	76.7 17.9	52.0 11.2	30.4 6.7	24.1 6.9
- .2	76.2 16.7	73.9 14.3	44.3 8.3	37.7 8.7
- .15	141 27	76.8 14.4	61.6 10.5	53.1 11.2
- .1	125 24	92.6 16.5	54.9 9.5	55.3 11.3
- .05	148 27	90.7 16.2	77.0 12.3	68.4 13.2
0	152 28	108 19	67.1 10.9	84.6 15.9
.05	149 27	118 21	78.9 12.4	70.5 13.4
.1	162 29	118 21	80.7 12.9	96.5 18.1
.15	143 28	121 22	79.9 13.2	95.1 18.5
.2	163 32	165 30	90.1 15.3	104 20.4
.25	169 35	138 26	107 19	82.0 17.5
.3	231 49	183 36	126 23	125 27
.35	266 63	209 43	193 36	211 47
. 4	617 145	482 98	315 66	268 66
. 45	1010 263	606 134	384 91	636 158
. 5				

$\pi^- p \rightarrow \pi^- p$

3.0 GeV/c	3.1 GeV/c	3.2 GeV/c	3.3 GeV/c
22.8 ± 16.4	11.5 ± 5.9	5.2 ± 2.7	9.5 ± 5.6
10.3 6.1	10.8 3.8	8.8 2.6	10.7 4.2
23.2 7.9	10.8 2.5	7.0 1.7	12.5 3.5
9.8 3.7	5.0 1.3	6.2 1.3	4.2 1.6
10.0 3.3	7.2 1.5	2.9 .8	4.8 1.5
19.6 4.3	8.6 1.5	5.6 1.1	6.2 1.6
36.1 6.1	15.8 2.3	9.5 1.4	7.3 1.6
54.0 8.1	20.1 2.6	12.2 1.5	11.0 2.0
68.4 9.7	28.8 3.5	16.8 2.0	11.8 2.0
72.1 10.0	38.5 4.6	26.8 2.9	19.8 3.0
99.4 13.5	47.4 5.6	32.9 3.5	28.2 4.0
123 16.5	59.7 7.0	41.5 4.3	41.3 5.7
149 20	88.4 10.3	67.1 7.0	58.8 8.0
190 26	119 14	84.9 8.8	82.3 11.1
250 35	178 21	141 15	123 17
292 43	184 22	170 18	182 25
322 50	305 39	238 26	264 38

TABLEAU 4.1. — SECTIONS EFFICACES DIFFÉRENTIELLES $\frac{d\sigma}{dt}$ (nbarn/(GeV/c)²)

$\cos\theta_{cm}$	$\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p$				$K^-p \rightarrow K^-p$		$\pi^-p \rightarrow \pi^-p$					
	8 GeV/c		12 GeV/c		12 GeV/c		5 GeV/c		8 GeV/c		12 GeV/c	
- .6	2.65	± 2.66			0	± 3.3						
- .5			0	± .300							0	± 1.1
	3.23	2.30					150	± 150	4.55	± 3.24		
- .4					0	1.37						
	2.15	1.53					164	95	4.94	2.51		
- .3			.134	.137							.38	.45
	12.2	4.7										
-.25					.63	.70	267	90	3.30	1.68		
	2.94	2.09										
- .2												
	3.71	2.15										
-.15					.99	.83	39.0	28.0	3.18	1.33		
	4.42	2.23										
- .1			.980	.103							0	.23
	8.01	2.90					317	97	6.66	2.43		
-.05					.45	.50						
	1.92	1.37					243	82	8.42	2.65		
0												
	8.60	2.94					341	90	7.90	2.48		
.05			.184	.188	0	.45					.22	.26
	11.7	3.5					223	72	7.49	2.38		
.1												
	24.6	5.5	.383	.391			329	86	16.4	3.84		
.15					1.37	1.01						
	25.0	5.8	1.23	.76			322	86	21.7	4.5		
.2												
	34.6	6.7	.86	.64			381	101	31.4	5.4		
.25					.53	.58						
	50.6	9.7	.47	.48			31.2	31.2	28.6	6.0		
.3											0	.27
	56.4	11.1	3.33	1.52	2.8	2.3	140	71	29.3	6.5		
.35												
	53.0	11.6	6.3	2.4	4.2	3.0	232	96	37.1	8.0		
.4												
	91.2	17.5	8.5	3.1	8.4	5.5	1220	256	40.0	8.9		
.45											4.6	3.5
	167	29	19.6	6.0	2.30	2.52	3350	497	47.7	10.7		
.5												
	299	48	42.8	12.0	20.2	12.4	9330	1105	37.3	11.7		
.55											8.4	6.5
	412	76	67.0	20.1	14.0	11.8	24500	2520	28.2	12.9		
.6												

4.2.2. Réactions d'annihilation :

Les événements correspondants sont trop peu nombreux pour qu'on puisse en tirer raisonnablement un tableau de sections efficaces. Nous ne représenterons que leur distribution angulaire brute (sur la fig. 4.8.) avec la courbe de sensibilité correspondante (nombre d'événements par nanobarn).

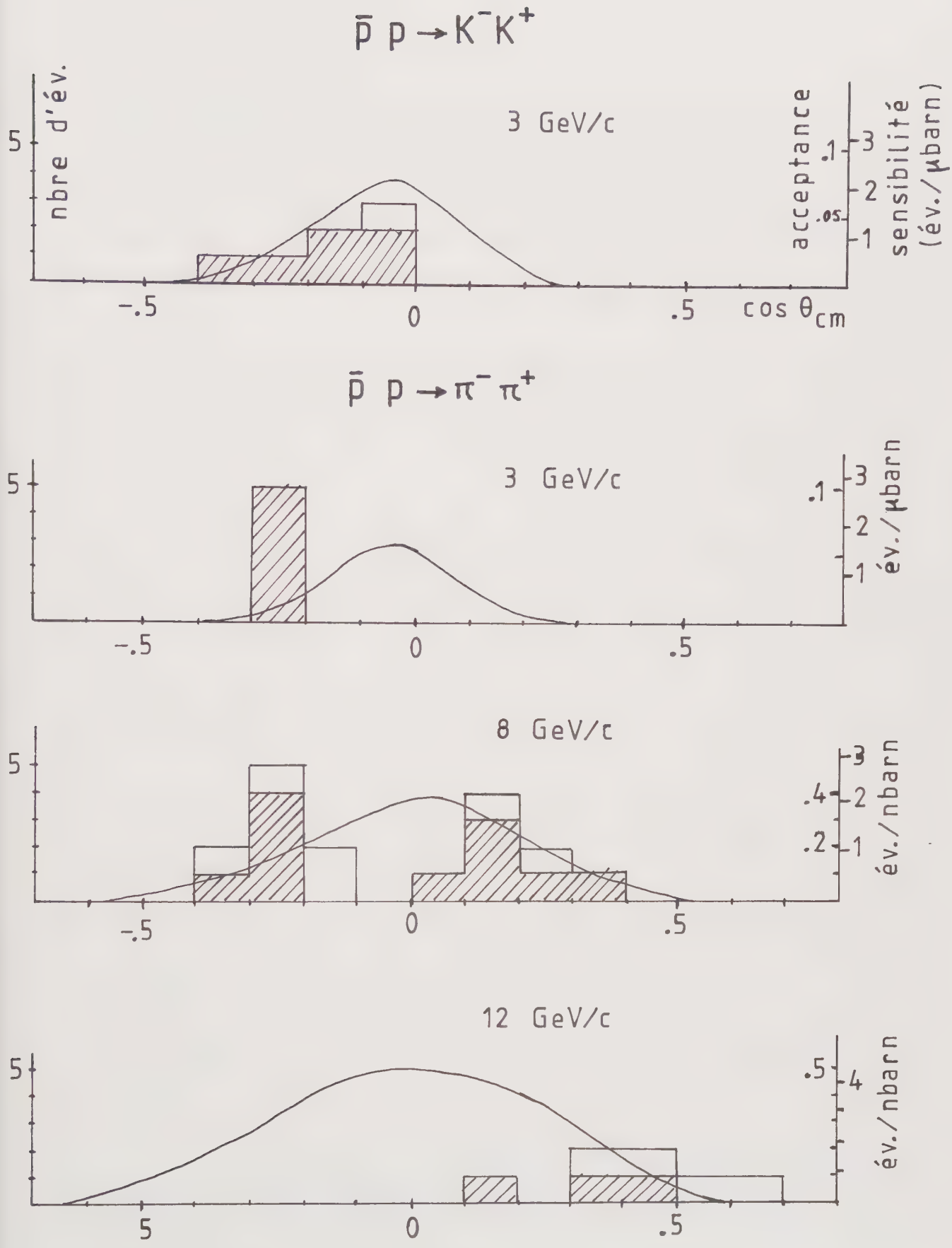
De 3 à 3.3 GeV/c il n'y a pas de problème d'identification ni de soustraction du fond. A une exception près, ce sont des événements du type C, et la variable δm^2 (définie en 2.3.2) les sépare bien : leur probabilité de χ^2 cinématique (ajustement 3 contraintes) est raisonnable.

On remarque qu'ils sont tous à $\cos\theta_{cm} < 0$, et que les $\pi^-\pi^+$ vérifient tous $-.3 < \cos\theta_{cm} < -.2$, alors que l'acceptance est à peu près symétrique autour de 0.

A 8 et 12 GeV/c, les événements C sont tous identifiables à $\bar{p}p \to \pi^-\pi^+$ (sauf un, dont la probabilité est inférieure à 10^{-4}). Quant aux événements D, nous avons déjà vu (3.4.3.) que la plupart appartiennent vraisemblablement à cette même réaction. Ceux qui pourraient correspondre à K^-K^+ ont une mauvaise probabilité, sauf un, à 8 GeV/c, avec $\cos\theta_{cm} = .09$

Dans l'impossibilité d'évaluer et de soustraire le fond, nous avons écarté les événements dont la probabilité est inférieure à 10^{-4}.

Les distributions angulaires obtenues sont malaisées à interpréter, et nettement variables avec l'impulsion. D'autre part, l'absence presque totale de K^-K^+ à 8 et 12 GeV/c indique une décroissance en énergie plus forte pour cette réaction que pour $\pi^-\pi^+$; à moins que la relative abondance de K^-K^+ à 3 GeV/c soit un phénomène particulier qu'on ne peut extrapoler.



en hachures :

événements à traces convergentes

FIG 4.8

Si on se restreint à $\pi^-\pi^+$, à 8 et 12 GeV/c, on ne peut pas affirmer grand chose : les distributions présentant toutes deux un creux autour de 90°, et le calcul des sections efficaces moyennées sur un intervalle dépend violemment des bornes de cet intervalle. Il serait imprudent d'essayer d'en tirer une estimation de $\frac{d\sigma}{dt}$ à 90°, ou de l'exposant d'une dépendance supposée en s^{-n} (cf. 4.3.1.) ; à titre d'illustration on trouverait ainsi (en nb/(GeV/c)^2) :

	$\frac{d\sigma}{dt}$ à 8 GeV/c	$\frac{d\sigma}{dt}$ à 12 GeV/c	exposant
$\lvert\cos\theta_{cm}\rvert < .3$	2.63	0.068	10
$\lvert\cos\theta_{cm}\rvert < .5$	2.25	0.288	5.6

Il serait tout aussi arbitraire d'utiliser les résultats d'autres expériences à plus basse impulsion pour améliorer une telle estimation.

Pour la réaction $\bar{p}p \to K^-K^+$, on peut évaluer un ordre de grandeur maximal pour $\frac{d\sigma}{dt}$ moyennée dans l'intervalle $\lvert\cos\theta_{cm}\rvert < .3$

à 8 GeV/c : 0,14 nb/(GeV/c)^2

à 12 GeV/c : 0,036 nb/(GeV/c)^2

Précisons bien qu'il ne s'agit pas d'une limite supérieure associée à un degré de confiance élevé.

4.3. COMPARAISONS AUX MODELES :

4.3.1. Les lois de comptage dimensionnel :

Elles reposent sur l'idée d'invariance d'échelle des amplitudes des processus à grand transfert. Elles ont été déduites de cadres théo-

riques généraux par Brodsky et Farrar /3/ et Matveev, Muradjan et Tavkhelidze /4/ et peuvent s'énoncer ainsi pour une réaction $a+b \to c+d$:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{s^n} f(\theta_{cm})$$ (à des corrections logarithmiques près)

avec $$n = n_a + n_b + n_c + n_d - 2$$

où n_a, n_b, n_c et n_d sont les nombres de constituants "actifs" de chaque particule (c'est-à-dire participant à un processus élémentaire à grand transfert). Pour une réaction exclusive, c'est le nombre total de constituants.

Si ces constituants sont les quarks de valence, on trouve :

$n = 10$ pour $BB \to BB$ et $\bar{B}B \to \bar{B}B$

$n = 8$ pour $\bar{B}B \to MM$ et $MB \to MB$

(B = baryon, M = méson)

En fait, tous les modèles ne respectent pas ces valeurs. Ainsi le C.I.M. (Constituent Interchange Model) dans sa version originale /1/ trouve une loi de cette forme pour $BB \to BB$ et $\bar{B}B \to \bar{B}B$, mais avec $n = 12$; le modèle de Landshoff /6/, considérant une diffusion simultanée dans la même direction de chaque quark d'un baryon sur un quark de l'autre, prédit $n = 8$ pour ces mêmes réactions. Pour $MB \to MB$ et $\bar{B}B \to MM$, l'accord est plus général (sauf /6/) sur la valeur $n = 8$, qui est compatible avec les résultats existants en $\pi^+ p$ et $\pi^- p$ élastique (avec toutefois des fluctuations autour de la loi prédite en s^{-8}) .

Les données en pp élastique, qui sont les plus nombreuses et les plus précises, concordent bien, de $s = 10$ à 25 GeV^2 avec la valeur $n = 10$; dans la gamme de 25 à 40 GeV^2, la valeur 12 semble meilleure.

Pour cette réaction, l'invariance de la fonction $f(\theta_{cm})$ est bien vérifiée. Certains auteurs /27, 28/ ont mis en évidence, par rapport à la loi en s^{-10}, une fluctuation de $\frac{d\sigma}{dt}$ à 90° ayant un caractère oscillant en fonction de l'énergie.

Il faut remarquer que les "corrections logarithmiques" souvent évoquées (mais la plupart du temps ignorées ensuite) peuvent avoir un effet non négligeable aux énergies moyennes : ainsi il est instructif de remarquer que la fonction $\frac{Log^2(x/x_0)}{x}$ reste presque constante (à 10 % près) pour $4\,x_0 < x < 20\,x_0$, et ne décroît que lentement au-delà. Ainsi un modèle comme celui de Preparata et Soffer /29/ qui prédit une dépendance en $s^{-n}\,Log^2(s/s_0)$, avec s_0 de l'ordre de 1 GeV^2, équivaut dans une large gamme d'énergie (parfois tout le domaine couvert par les données) à un modèle en s^{-n+1}.

D'autres types de corrections ont été proposées. Citons par exemple /30/ une variation en $s^{-n_{eff}}$, où n_{eff} dépend de s sous la forme $n_{eff} = n_0 + a\,Log(s/s_0)$, ce qui est une façon de rendre le modèle plus flexible sans renoncer formellement au principe des lois de comptage.

La distribution angulaire dépend de la représentation choisie pour les hadrons et des amplitudes considérées comme dominantes. En particulier la représentation des baryons diffère suivant les modèles.

Finalement le cadre théorique des lois de comptage est très flou et peut s'adapter aux écarts que l'expérience met en évidence. En général, on se contente de vérifier ces lois en moyenne, sans tenir compte des détails de structure de $\frac{d\sigma}{dt}$.

4.3.2. Prédictions de la chromodynamique quantique perturbative : /34/

Les réactions à 2 corps sont des phénomènes très complexes du point de vue de la CDQ (Chromodynamique quantique), car les hadrons doivent être considérés comme des états liés de quarks et de gluons.

L'approche perturbative de la CDQ amène à considérer la superposition d'un nombre considérable d'amplitudes élémentaires, et dans l'état actuel des choses, il est hors de question d'en tirer une prédiction complète des sections efficaces. On montre toutefois que cette approche conduit à confirmer les lois de comptage dimensionnel.

La constante de couplage effective qui intervient dans la CDQ perturbative peut s'écrire :

$$\alpha_s(Q^2) \simeq \frac{4\pi}{\beta \, \mathrm{Log} \, \frac{Q^2}{\Lambda^2}}$$

Q^2 étant le carré du moment transféré, β une constante reliée au nombre de saveurs de quarks n_f par $\beta = 11 - \frac{2}{3} n_f$ (donc $\beta = 7$ pour $n_f = 6$), et Λ une constante dont la valeur serait de l'ordre de 0.1 GeV d'après les résultats expérimentaux actuels.

Pour une diffusion hadronique $AB \to CD$ à grande énergie et grand angle, la section efficace prédite est de la forme :

$$\frac{d\sigma}{dt}(AB \to CD) = \left[\frac{\alpha_s(p_t^2)}{s}\right]^{n-2} \Big/ \left(\mathrm{Log} \, \frac{p_t^2}{\Lambda^2}\right)^{2\sum_i \gamma_i} \times f(\theta_{cm})$$

avec p_t : impulsion transverse

n : nombre total de constituants dans A, B, C, D.

γ_i : $\begin{cases} 0 \text{ pour un méson} & \text{(hélicité 0)} \\ -\frac{2}{3\beta} \text{ pour un proton} & \text{(hélicité 1/2)} \end{cases}$

La somme $\sum_i \gamma_i$ (portant sur A, B, C, D) vaut donc, avec $\beta = 7$, $-\frac{4}{21}$ pour une réaction $\pi p \to \pi p$ et $-\frac{8}{21}$ pour les réactions $pp \to pp$ et $\bar{p}p \to \bar{p}p$

D'où :

$$\frac{d\sigma}{dt}(AB \to CD) \propto \frac{f(\theta_{cm})}{s^{n-2}} \left(\text{Log} \frac{p_t^2}{\Lambda^2} \right)^{K+2-n}$$

avec $K = \frac{8}{21}$ ou $\frac{16}{21}$ suivant la réaction.

Pour un angle θ_{cm} voisin de $\frac{\pi}{2}$, p_t^2 est voisin de $\frac{s}{4}$ et on peut donc écrire :

$$\frac{d\sigma}{dt} \propto \frac{f(\theta_{cm})}{\left(s \, \text{Log} \frac{s}{4\Lambda^2} \right)^{n-2}}$$

Dans la mesure où $s \gg \Lambda^2$, le comportement de $\frac{d\sigma}{dt}$ est pratiquement en $\frac{f(\theta_{cm})}{s^{n-2}}$, c'est-à-dire ce que prédisent les lois de comptage.

Il est à noter que la correction logarithmique tend à faire décroître $\frac{d\sigma}{dt}$ plus vite que $\frac{1}{s^{n-2}}$.

Pour ce qui est de la fonction $f(\theta_{cm})$, elle n'est pas prédite exactement ; même si elle pouvait être paramétrisée en fonction de ce qu'on sait par ailleurs sur les hadrons, le nombre de paramètres serait trop nombreux pour qu'on puisse envisager un ajustement significatif sur les résultats de WA13.

4.3.3. Essais d'ajustements dépendant de l'énergie :

Nous avons écarté d'emblée les réactions $\bar{p}p \to K^- K^+$ ou $\pi^- \pi^+$, ainsi que $K^- p$ élastique, pour laquelle nous n'avons d'événements qu'à 12 GeV/c (en petit nombre d'ailleurs). Pour $\bar{p}p$

et $\pi^- p$ élastiques nous avons essayé des ajustements par maximum de vraisemblance sur les événements à 5 GeV/c ($\pi^- p$ seulement), 8 et 12 GeV/c .

Les modèles font intervenir en général des amplitudes en $s^\alpha t^\beta u^\gamma$. Si on néglige les masses, on a $\frac{|t|}{s} = 1 - \cos\theta_{cm}$ et $\frac{|u|}{s} = 1 + \cos\theta_{cm}$. Nous avons donc adopté une forme générale :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sigma_0}{s^n} (1-\cos\theta_{cm})^p (1+\cos\theta_{cm})^q$$

où n , p , q sont les paramètres ajustables.

Cette forme laisse une certaine liberté à la distribution angulaire, et on peut espérer ainsi déterminer l'exposant n , le paramètre considéré comme le plus important, d'une façon à peu près intrinsèque.

Il eût été préférable d'envisager aussi des combinaisons linéaires de tels termes (comme le prédisent différents modèles pour $\pi^- p$) mais la faible statistique et l'intervalle restreint en θ_{cm} enlèverait toute signification à de tels ajustements (et peut-être aussi leur stabilité). Nous admettrons donc implicitement qu'une des amplitudes est dominante.

Par ailleurs l'existence de structures à t fixe amène à faire des coupures du type $|t| > |t|_{min}$, avec $|t|_{min}$ indépendant de l'impulsion, et de l'ordre d'au moins $3(\text{GeV/c})^2$. Il en résulte trois inconvénients :

- le nombre d'événements utilisables est réduit.
- les valeurs ajustées de n, p, q pourront dépendre sensiblement du choix (assez arbitraire) de $|t|_{min}$.

. On ne disposera, à basse énergie, que d'événements avec $\cos\theta_{cm} < z_m$ (z_m étant proche de 0, voire négatif), tandis qu'à haute énergie les événements sont presque tous à $\cos\theta_{cm} > 0$ (à cause de la distribution piquée vers l'avant). Il en résulte que les valeurs de p et q subiront des contraintes dans des domaines en $\cos\theta_{cm}$ qui se recouvrent peu à différentes énergies, et que la valeur ajustée de n résultera plus d'un recollement de morceaux que d'une contrainte dans tout l'intervalle angulaire disponible.

En d'autres termes, cet ajustement est trop flexible pour donner à l'exposant n une signification réellement intrinsèque.

En revanche, nous avons vérifié dans tous les cas que la fonction de vraisemblance avait un maximum inambigu, et qu'elle était bien représentée par une forme gaussienne dans un vaste domaine autour du maximum.

Nous avons aussi réalisé un ajustement du seul paramètre n, en imposant la distribution angulaire prédite par le C.I.M., bien que cette paramétrisation n'ait aucun fondement théorique (elle ne peut servir que de test pour la validité de ce modèle).

Enfin, pour élargir la gamme en énergie, nous avons tenté d'introduire dans l'ajustement les résultats d'autres expériences (/26/ pour $\bar{p}p$ à 5 GeV/c et /31/ pour $\pi^- p$ à 20 et 30 GeV/c) : nous avons approximativement reconstitué leurs événements (avec leur poids) pour les faire entrer dans le formalisme de la vraisemblance.

Cette procédure est hasardeuse (nous ne connaissons pas le nombre exact d'événements) mais il s'avère qu'elle ne change pas beaucoup les résultats.

TABLEAU 4.2. — AJUSTEMENTS DEPENDANT DE L'ÉNERGIE

Impulsion (GeV/c)	Nb d'événements			Ajustement 3 paramètres						Ajustement de n seul			
				n	p	q	$d\sigma/dt$ à 90° (nb/(GeV/c)^2)			n	$d\sigma/dt$ à 90° (nb/(GeV/c)^2)		
	5	8	12				5	8	12		5	8	12
$\bar{p}p$ $\lvert t\rvert_{min}$ = 3.8		200	64	7.24 ±.41	-5.12 1.23	.20 1.67		5.54 ±.62	.375 .067	7.31 ±.39		5.21 ±.37	.344 .043
$\bar{p}p$ " 4.2		170	64	8.08 ±.48	-7.25 1.33	-1.80 1.70		5.34 ±.60	.264 .056	7.65 .40		5.92 ±.46	.344 .044
$\bar{p}p$ " 5		95	64	9.00 ±.67	-8.67 1.42	-2.86 1.73		5.35 ±.61	.188 .051	7.66 .45		5.98 ±.62	.346 .044
π^-p " 3.2	109	276	10	7.47 ±.25	-2.99 .82	-.12 1.03	210 ±19	8.43 .71	.451 .072	7.54 ±.23	217 20	7.90 .45	.411 .052
π^-p " 4.	57	243	10	8.21 ±.34	-2.98 1.07	.32 1.28	291 ±37	8.18 .75	.328 .064	7.91 ±.29	256 31	8.20 .49	.369 .053
$\bar{p}p$ avec réf.26 $\lvert t\rvert_{min}$ = 3.8	+ 5 à 5 GeV/c			7.15 ±.38	-5.17 1.11	.16 1.47				7.22 .36			
π^-p avec réf.31 $\lvert t\rvert_{min}$ = 3.2	+ 29 et 8 à 20 et 30 GeV/c			7.55 ±.13	-3.04 .71	.07 1.00				7.56 .13			

De chaque ajustement, on peut déduire par interpolation une valeur de $\frac{d\sigma}{dt}$ à 90° ; cette valeur n'est évidemment pas stable : son interprétation et son utilisation ultérieure sont donc sujettes à caution, tout comme les valeurs obtenues par moyenne sur un intervalle.

Le tableau 4.2. résume les résultats : on voit en particulier que pour différentes valeurs de $|t|_{min}$, les valeurs de n obtenues pour $\bar{p}p$ sont mutuellement incompatibles par rapport aux incertitudes mathématiques issues de l'ajustement.

4.3.4. Commentaires :

Il ressort de ces ajustements que la valeur $n = 8$, et le modèle C.I.M. en particulier, peuvent être considérées comme compatibles avec nos résultats en $\pi^- p$, sans que ceux-ci constituent une confirmation positive de ce modèle : ils ne permettent pas de choisir entre ce modèle et d'autres, comme celui de Pire /32/ ou de Preparata-Soffer /29/. Nous avons reporté les prédictions de ces modèles sur la fig. 4.9.

Pour $\bar{p}p$ élastique, la valeur de n est mal définie : elle oscille autour de 8, c'est-à-dire moins que la valeur observée en pp (10 à 12). Le modèle de Landshoff /6/ prédit une telle variation en s^{-8} : il se pourrait que l'amplitude qu'il considère soit dominante pour $\bar{p}p$, alors qu'elle ne l'est pas pour pp. La correction logarithmique apportée aux lois de comptage par la CDQ perturbative ne saurait être invoquée ici car elle va dans le sens opposé ; elle est d'ailleurs très faible (cf. 4.3.2.). Une autre interprétation est que le rapport de $\frac{d\sigma}{dt}$ à la loi théorique en s^{-10} présente des oscillations en fonction de s, analogues à celles observées pour pp /27/, et de plus grande amplitude, et que le comportement observé jusqu'à 12 GeV/c reflète une portion ascendante de ces oscillations. Les résultats de Jenkins et Price /24/ pour $\pi^{\pm} p$ en-dessous de 10 GeV/c suggèrent aussi l'amorce de telles oscillations de grande amplitude : elles pourraient donc être la règle

générale. Récemment Pire et Ralston /33/ en ont proposé une interprétation en termes de déphasage chromo-coulombien, dans le cadre de la CDQ.

Un autre point de comparaison avec les modèles concerne les rapports entre réactions croisées : si les mêmes amplitudes en $s^\alpha t^\beta u^\gamma$ sont dominantes dans deux voies croisées, on peut en déduire des rapports entre sections efficaces à 90° (c'est-à-dire pour $t = u = \frac{s}{2}$) dépendant des coefficients α , β , γ ; ces rapports sont ainsi directement liés aux distributions angulaires.

Ainsi le modèle C.I.M. prédit les proportions suivantes à 90° (a et b sont ces coefficients auxquels on attribue généralement les valeurs 2 et 1)

$$(\pi^- p \to \pi^- p) : (K^- p \to K^- p) : (\bar{p} p \to \pi^- \pi^+) : (\bar{p} p \to K^- K^+)$$

$$= (4b+a)^2 : a^2 : \frac{(a+b)^2}{2} : \frac{a^2}{2}$$

$$= 72 : 8 : 9 : 4$$

Les $\pi^- p$ observés à 12 GeV/c apparaissent trop peu nombreux par rapport à ces prédictions. Si on suppose b plus petit pour pallier cet inconvénient, on est en contradiction avec la quasi-absence de $\bar{p} p \to K^- K^+$

La comparaison des réactions $\bar{p} p$ et pp élastiques est plus délicate : par rapport à la section efficace pp , celle de $\bar{p} p$ décroît moins vite, le rapport $(pp)/(\bar{p} p)$ passant d'environ 40 à 8 GeV/c à 20 à 12 GeV/c (les résultats étant d'ailleurs compatibles avec une valeur constante) ; le modèle C.I.M. prédit une valeur 50. Cette variation est peut-être simplement la conséquence des oscillations dont nous avons parlé plus haut, et il n'est pas possible d'en déduire une tendance asymtotique.

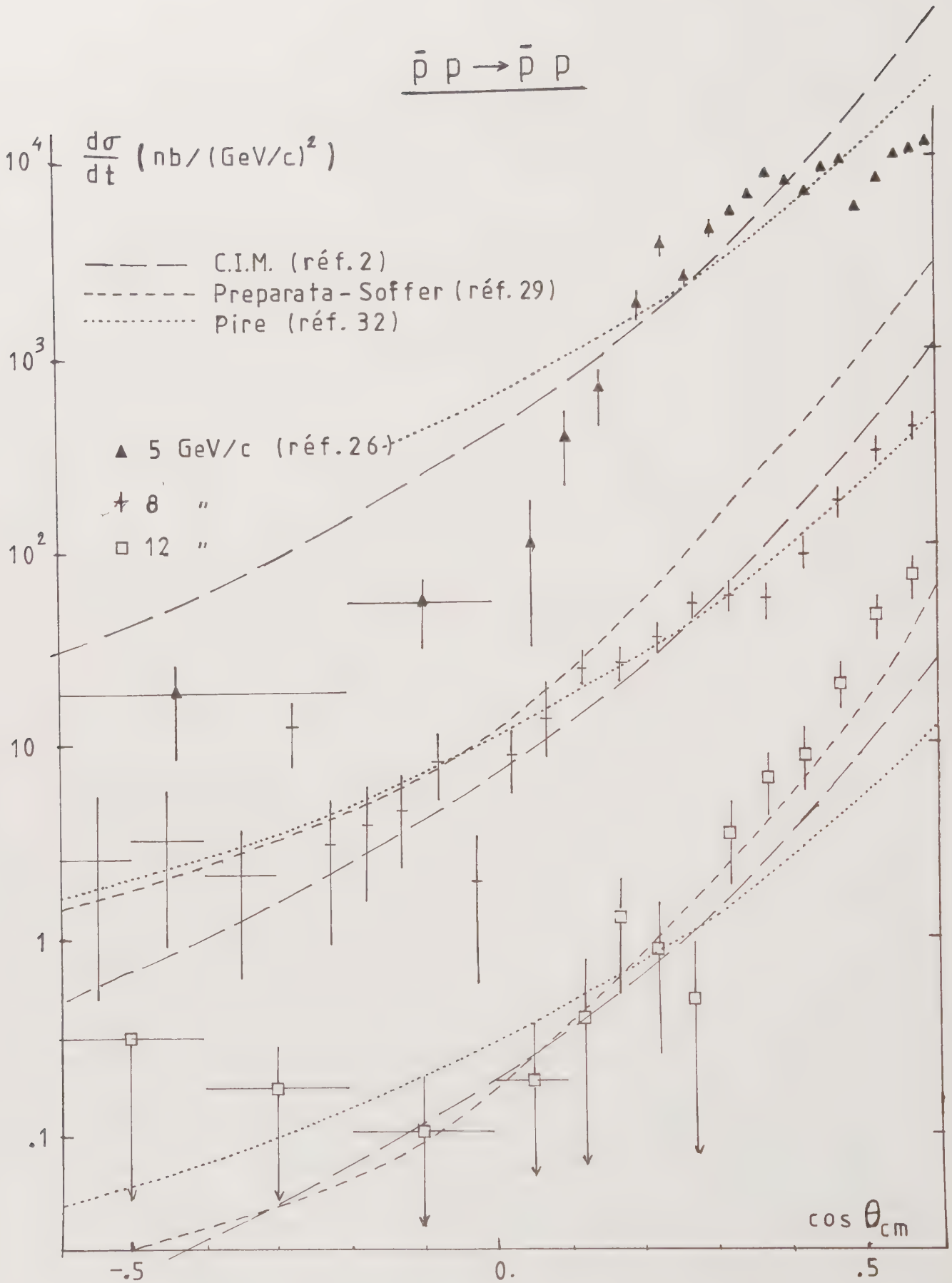

$\bar{p}\,p \rightarrow \bar{p}\,p$
$\frac{d\sigma}{dt}$ (nb/(GeV/c)^2)
10^4
10^3
10^2
10
1
.1
C.I.M. (réf. 2)
Preparata-Soffer (réf. 29)
Pire (réf. 32)
▲ 5 GeV/c (réf. 26)
✶ 8 "
□ 12 "
$\cos\theta_{cm}$
-.5
0.
.5

FIG. 4.9

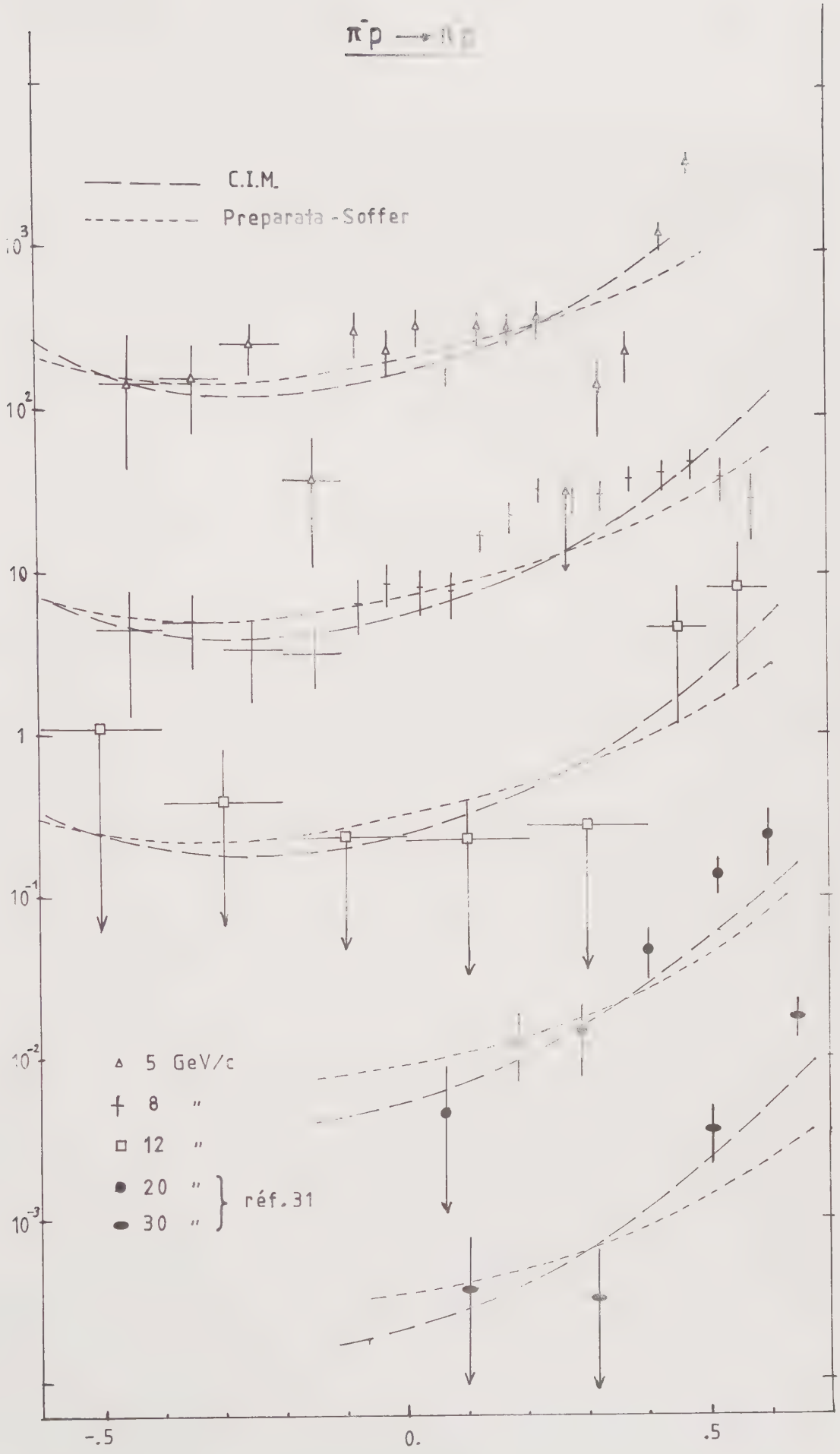

C.I.M.
Preparata - Soffer
10^3
10^2
10
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
5 GeV/c
8 "
12 "
20 "
30 "
réf. 31
-.5
0.
.5

FIG. 4.9

En résumé, nous ne pouvons dégager de conclusion nette : on ne sait pas bien où doit commencer le domaine de validité des lois de comptage dimensionnel, et si ce domaine est le même pour toutes les réactions. En outre, l'existence peut-être générale d'oscillations en fonction de l'énergie fausse toutes les comparaisons ponctuelles ; si ces lois ne sont valables qu'en moyenne par rapport à ces oscillations, seules des données continues en énergie, sur une large gamme, peuvent les établir clairement. En ce sens les résultats de WA13 sont compatibles avec ces lois, sans plus.

CONCLUSION

L'expérience WA13 a été réalisée pour étudier les réactions à deux corps émis à grand angle, induites par des hadrons négatifs (en particulier des antiprotons) sur une cible de protons. Cela a été possible grâce à :

— un faisceau riche en antiprotons (c'est un faisceau secondaire produit par les protons du SPS dans une gamme d'énergie relativement basse).

— un dispositif de séparation par deux cavités radiofréquences, permettant d'arrêter la plupart des pions et de rendre les antiprotons majoritaires dans le faisceau, tout en conservant beaucoup de kaons à certaines impulsions.

— un système de déclenchement très sélectif basé sur des compteurs de multiplicité, des détecteurs de γ en veto, et surtout une chambre de coplanarité divisée en secteurs, associée à une logique souple et rapide. Le déclenchement des chambres à étincelles de l'OMEGA était ainsi ramené à un taux très bas.

Bien que conçue au départ pour des réactions à deux neutres se désintégrant en mode chargé, l'expérience permettait aussi de sélectionner en parallèle les réactions à deux chargés, avec une acceptance à peu près centrée sur un angle de diffusion de 90° dans le centre de masse, correspondant à des impulsions transverses allant jusqu'à 2,3 GeV/c ; toutes les interactions à deux corps observées ont, dans ce domaine, des sections efficaces qui décroissent très vite avec l'énergie (à 12 GeV/c, elles ne dépassent pas quelques nanobarns pour l'intervalle angulaire de 75° à 105° dans le centre de masse).

Dans cette thèse nous avons étudié les réactions à deux corps chargés : les diffusions élastiques $\bar{p}p$, K^-p et π^-p , et les réactions d'annihilation $\bar{p}p \to K^-K^+$ ou $\pi^-\pi^+$.

A partir d'environ un million d'événements enregistrés sur bande, le programme ROMEO, muni de filtres successifs, a reconstruit quelques dizaines de milliers de candidats pour ces réactions (dont quelques centaines seulement à 12 GeV/c). Une analyse cinématique basée sur un ajustement à trois contraintes et le choix d'une variable discriminatoire a permis d'isoler des lots pratiquement purs pour chaque réaction, les coupures n'entraînant que très peu de pertes.

Une méthode d'ajustement global du vertex, exploitant au mieux l'information géométrique disponible (les points mesurés sur les traces et le fait qu'elles sont concourantes) a notablement amélioré la résolution cinématique. Cette méthode n'est pas particulière à l'expérience, elle est généralisable à toute configuration topologique ; elle ne requiert par elle-même aucune hypothèse cinématique : elle fournit une information plus riche pour l'analyse cinématique ultérieure.

Finalement, la précision des résultats de l'expérience est plutôt limitée par la faiblesse de la statistique et l'incertitude sur la normalisation, qui doit prendre en compte le dénombrement du faisceau, l'acceptance et l'efficacité de tous les éléments du détecteur et du système de déclenchement, et la reconstruction. Une comparaison avec des résultats précédents (de plusieurs sources) à 5 GeV/c permet de penser que la normalisation est globalement satisfaisante : en tout cas, l'incertitude principale aux énergies élevées (8 et 12 GeV/c), au voisinage de 90°, est clairement statistique.

Nous avons essayé de comparer les sections efficaces ainsi obtenues aux prédictions théoriques pour des collisions "dures" (c'est-à-dire à grand transfert), à deux corps ; en particulier les lois de comptage dimensionnel (confirmées par la chromodynamique quantique perturbative), qui prédisent une forme asymptotique (pour s grand, et $|t|$ et $|u|$ non négligeables devant s) :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left(\frac{s_0}{s}\right)^{n-2} f(\theta_{cm})$$

(n = nombre total de quarks constituants)

Nos résultats en $\pi^- p$ et $\bar{p}p$ élastiques ne montrent pas une telle factorisation : la distribution angulaire semble plutôt dominée par des structures périphériques (à t constant). Malgré cela, l'allure générale est compatible avec ces lois, ainsi qu'avec différents modèles qui précisent la fonction $f(\theta_{cm})$, et que nous ne pouvons ni confirmer, ni rejeter ; pour $\bar{p}p$ toutefois, la décroissance semble moins rapide, dans le domaine exploré, que celle qui est prédite (en s^{-10}).

Les ajustements par maximum de vraisemblance sur des formes paramétrisées de $d\sigma/dt$, avec une coupure en $|t|$ indépendante de l'énergie (pour tenter de se débarrasser des structures parasites) aboutissent aux mêmes conclusions qualitatives :

— Pour $\pi^- p$ élastique : compatibilité, en moyenne, avec les lois de comptage, et avec le modèle C.I.M. en particulier (ce que trouvent aussi les autres expériences ayant étudié $\pi^{\pm} p$).

— Pour $\bar{p}p$ élastique : tendance à décroître moins vite que prévu, sans qu'on puisse conclure sur le comportement asymptotique (pour cette réaction, il n'y a pas d'autres résultats à des énergies comparables ou supérieures aux nôtres, dans le même domaine angulaire).

Pour les réactions d'annihilation, les points marquants sont :

— une distribution angulaire concentrée sur les bords du domaine couvert par l'acceptance, mais, semble-t-il, dépendante de l'énergie.

— l'absence quasi-totale d'événements $\bar{p}p \to K^-K^+$ à 8 et 12 GeV/c.

Les sections efficaces des différentes réactions à 90° ne sont pas déterminées expérimentalement de façon précise, puisqu'elles dépendent d'une interpolation (voire une extrapolation) de la distribution angulaire à une zone très dépeuplée en événements. Aucun modèle ne rend bien compte de l'ensemble de leurs rapports (en particulier les π^-p élastiques semblent trop peu nombreux par rapport aux autres réactions). Le rapport $(\bar{p}p \to \bar{p}p)/(pp \to pp)$ est de l'ordre de 1/40 à 8 GeV/c et 1/20 à 12 GeV/c.

D'une façon générale, nos résultats apparaissent comme insuffisants pour apporter une réponse nette aux questions théoriques, d'autant plus qu'on ne sait pas très bien où doit commencer le domaine de validité des lois asymptotiques. Seule une étude plus continue en énergie, avec une statistique abondante autour de 90°, permettrait d'observer l'évolution réelle des sections efficaces dans ce domaine, et leur écart, peut-être oscillant en fonction de l'énergie, par rapport aux lois de comptage.

A propos des différents types d'ajustement rencontrés, nous avons essayé de développer des éléments pour un traitement cohérent des matrices d'erreurs et de leur propagation ; nous avons également mis en évidence et interprété des écarts à l'uniformité de la distribution de probabilité de χ^2 d'un ajustement (accumulation aux basses probabilités).

Nous avons souligné l'importance de la contribution de la diffusion multiple dans les matrices d'erreurs, et nous proposons en annexe un algorithme optimal d'ajustement dans le cas où cette diffusion a lieu à l'intérieur de la portion mesurée de la trace (pour les traces chargées de WA13, la diffusion a lieu surtout dans la cible et les scintillateurs qui l'entourent, donc avant la portion mesurée, et la perte de précision qui en résulte est irréparable).

ANNEXE 1

TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES DES MATRICES D'ERREURS

A 1.1. Introduction.
A 1.2. Rotation du référentiel.
A 1.3. Translation le long de la trajectoire.
A 1.4. Propagation au vertex.

ANNEXE 2

AJUSTEMENTS PAR MOINDRES CARRES

A 2.1. Ajustement paramétrique.
A 2.2. Ajustement non-paramétrique avec contraintes.

ANNEXE 3

CAUSES D'ERREURS NON GAUSSIENNES

A 3.1. Introduction.
A 3.2. Mesures discrètes.
A 3.3. Distorsions.
A 3.4. Diffusion secondaire de la trace.
A 3.5. Déformation de la distribution de probabilité.

ANNEXE 1

TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES DES MATRICES D'ERREURS.

A 1.1. INTRODUCTION.

Nous supposons que la matrice d'erreurs d'une trace est définie sur cinq paramètres dans un référentiel Oxyz : ce sont deux paramètres de position, y et z, et trois paramètres définissant l'impulsion (par exemple 1/p, λ , φ ou p_x, p_y, p_z) ces paramètres étant définis à x fixé dans ce référentiel. Si on fait varier x on peut définir un "tube de probabilité" dans l'espace à 6 dimensions (x, y, z, p_x, p_y, p_z) ; la matrice d'erreurs à x_0 fixé représente une section de ce tube par le plan $x = x_0$.

Nous cherchons à calculer la matrice d'erreurs sur cinq paramètres définis par une autre condition (c'est à dire une autre section du tube de probabilité). Nous traiterons trois cas particuliers :

a) Rotation de référentiel en un point donné de la trace (et application à la définition d'erreurs perpendiculaires à la trace),

b) Translation du référentiel le long de la trace (en adoptant une paramétrisation hélicoïdale),

c) Calcul d'une matrice d'erreurs au vertex (c'est à dire en fait au point sur la trace le plus proche d'un vertex préalablement déterminé).

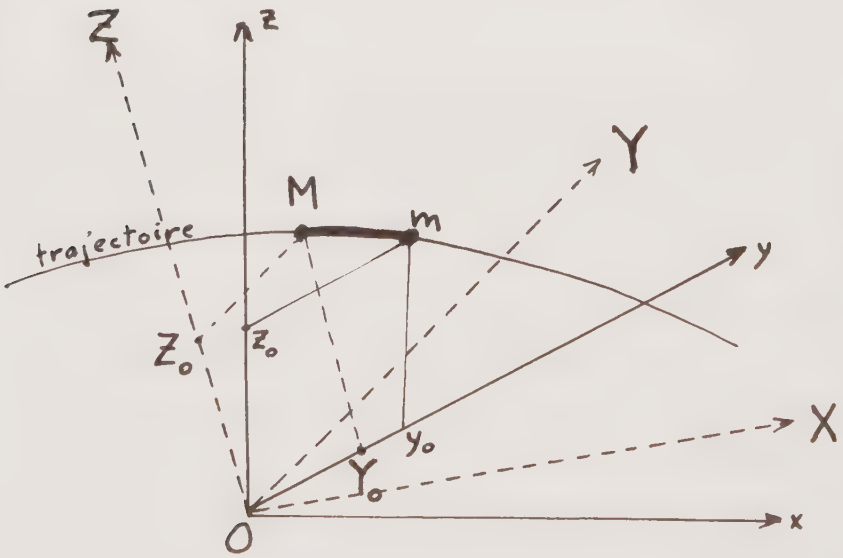
A 1.2. ROTATION DU REFERENTIEL.

Le passage des coordonnées x, y, z dans l'ancien référentiel à

X, Y, Z dans le nouveau s'écrit à partir d'une matrice orthogonale W :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Pour transformer la matrice d'erreurs il faut calculer les dérivées de (Y, Z, P_X, P_Y, P_Z) à X fixé par rapport à (y, z, P_x, P_y, P_z) à x fixé. La transformation est illustrée sur la figure ci-dessous (l'origine est placée au point où on effectue la transformation).



On passe des paramètres au point m (mesurés dans Oxyz) aux paramètres au point M (mesurés dans OXYZ)

La trajectoire dessinée représente une trajectoire possible dans le tube de probabilité, dont l'axe passe par O.

Cherchons d'abord les dérivées de Y et Z. La trace peut être localement paramétrisée par :

$$\begin{cases} Y = Y_o + \dfrac{P_Y}{P_X} X + O(X^2) \\ Z = Z_o + \dfrac{P_Z}{P_X} X + O(X^2) \end{cases}$$

Il en résulte immédiatement que les dérivées de Y et Z par rapport à P_X, P_Y et P_Z sont nulles en X = 0.

On écrit maintenant ces équations dans le référentiel Oxyz, en posant $A = \dfrac{P_Y}{P_X}$ et $B = \dfrac{P_Z}{P_X}$:

$$\begin{cases} w_{12}\, x + w_{22}\, y + w_{32}\, z = A(w_{11}\, x + w_{21}\, y + w_{31}\, z) + Y_o \\ w_{13}\, x + w_{23}\, y + w_{33}\, z = B(w_{11}\, x + w_{21}\, y + w_{31}\, z) + Z_o \end{cases}$$

La condition x = 0 qui définit y_o et z_o donne alors immédiatement

$$\begin{cases} Y_o = (w_{22} - A\, w_{21})\, y_o + (w_{32} - A\, w_{31})\, z_o \\ Z_o = (w_{23} - B\, w_{21})\, y_o + (w_{33} - B\, w_{31})\, z_o \end{cases}$$

ce qui définit les dérivées de Y et Z par rapport à y et z.

En exprimant P_X, P_Y, P_Z en fonction de P_x, P_y, P_z par la matrice W et de là A et B en fonction de $a = P_y / P_x$ et $b = P_z / P_x$ et en utilisant les propriétés de W, on peut écrire de façon équivalente :

$$\begin{cases} Y_o = \dfrac{1}{w_{11} + a\, w_{21} + b\, w_{31}} \left[(w_{33} - b\, w_{13})\, y_o + (a\, w_{13} - w_{23})\, z_o \right] \\ Z_o = \dfrac{1}{w_{11} + a\, w_{21} + b\, w_{31}} \left[(b\, w_{12} - w_{32})\, y_o + (w_{22} - a\, w_{12})\, z_o \right] \end{cases}$$

Ces dérivées à elles seules permettent le calcul des "erreurs perpendiculaires" évoquées en 2.3.1.

Pour calculer les dérivées de P_X, P_Y, P_Z à X fixé, on utilisera comme pour Y et Z une paramétrisation des composantes le long de la trace, au voisinage de l'origine. L'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = e\,\vec{u} \wedge \vec{H} = e\,\vec{v}$$

ds étant l'élément de longueur sur la trajectoire, $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par $\vec{P}$ et $\vec{H}$ le champ magnétique.

On en déduit :

$$\frac{d\vec{P}}{dX} = \frac{ds}{dX}\,\frac{d\vec{P}}{ds} = \frac{e}{u_X}\,\vec{v}$$

d'où la paramétrisation en fonction de X :

$$P_X = (P_X)_0 + \frac{e}{u_X} v_X X + O(X^2)$$

$$P_Y = (P_Y)_0 + \frac{e}{u_X} v_Y X + O(X^2)$$

$$P_Z = (P_Z)_0 + \frac{e}{u_X} v_Z X + O(X^2)$$

Par ailleurs $X = w_{11}\,x + w_{21}\,y + w_{31}\,z$; le point x = 0 sur la trajectoire sera donc défini par $X = w_{21}\,y_0 + w_{31}\,z_0$. On obtient ainsi l'expression de P_X, P_Y et P_Z en x = 0 en fonction de leur valeur en X = 0 et de y_0 et z_0

Par ailleurs, on passe de P_x, P_y, P_z à P_X, P_Y, P_Z en un point donné par la matrice W ; on peut donc écrire matriciellement :

$$\begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} & W & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix}_{X=0} + \frac{e}{u_X} (w_{21} y_0 + w_{31} z_0) \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix}$$

donc

$$\begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & W & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} - \frac{e}{u_X} (w_{21} y_0 + w_{31} z_0) \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix}$$

ce qui fournit les dérivées partielles cherchées.

Compte tenu de la définition de $\vec{V}$ on peut aussi écrire :

$$\frac{\partial P_X}{\partial y_0} = e\, w_{21} (B H_Y - A H_Z) \quad ; \quad \frac{\partial P_X}{\partial z_0} = e\, w_{31} (B H_Y - A H_Z)$$

$$\frac{\partial P_Y}{\partial y_0} = e\, w_{21} (H_Z - B H_X) \quad ; \quad \frac{\partial P_Y}{\partial z_0} = e\, w_{31} (H_Z - B H_X)$$

$$\frac{\partial P_Z}{\partial y_0} = e\, w_{21} (A H_X - H_Y) \quad ; \quad \frac{\partial P_Z}{\partial z_0} = e\, w_{31} (A H_X - H_Y)$$

L'expression de ces dérivées partielles en fonction des quantités a, b, H_x, H_y, H_z serait plus compliquée.

A 1.3. TRANSLATION LE LONG DE LA TRAJECTOIRE.

Nous adopterons ici une paramétrisation hélicoïdale, pour laquelle les variables p, λ, φ sont les mieux adaptées. Plus précisément (x_0, y_0, z_0) étant un point sur la trace en lequel on connaît la matrice d'erreurs sur ($y, z, 1/p, \lambda, \varphi$) à $x = x_0$ fixé, on écrira :

$$\begin{cases} x = x_0 + R(\cos\beta - \cos\beta_0) \\ y = y_0 + R(\sin\beta - \sin\beta_0) \\ z = z_0 + SR(\beta - \beta_0)\,\mathrm{tg}\,\lambda \end{cases}$$

avec S = signe géométrique (signe de la charge x signe du champ),

$R = p\cos\lambda / e|H_z|$ rayon de courbure en projection horizontale

$\beta = \varphi - S\frac{\pi}{2}$ (donc $\cos\beta = S\sin\varphi$ et $\sin\beta = -S\cos\varphi$),

p et λ sont supposés constants le long de la trajectoire.

On veut calculer les dérivées de y_1, z_1, φ_1 au point $x = x_1$ de la trajectoire, par rapport à $y_0, z_0, \varphi_0, 1/p$ et λ. La condition $x = x_1$ fixe $\beta = \beta_1$ tel que :

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_0 + \frac{x_1 - x_0}{R}$$

En différentiant cette équation, on trouve :

$$\sin\beta_1\, d\beta_1 = \sin\beta_0\, d\beta_0 + \frac{x_1 - x_0}{R}\,\frac{dR}{R}$$

alors que, d'après l'expression de R :

$$\frac{dR}{R} = -p\, d(1/p) - \operatorname{tg}\lambda\, d\lambda$$

On en déduit donc :

$$d\beta_1 = \frac{\sin\beta_0}{\sin\beta_1}\, d\beta_0 + \frac{x_1 - x_0}{R \sin\beta_1}\left[-p\, d(1/p) - \operatorname{tg}\lambda\, d\lambda\right]$$

En passant aux variables $\varphi_0 = \beta_0 + S\frac{\pi}{2}$ et $\varphi_1 = \beta_1 + S\frac{\pi}{2}$:

$$d\varphi_1 = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1}\, d\varphi_0 + \frac{x_1 - x_0}{R S \cos\varphi_1}\left[p\, d(1/p) + \operatorname{tg}\lambda\, d\lambda\right]$$

ce qui donne les dérivées de φ_1 :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_0} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_0} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial(1/p)} = p\,\frac{x_1 - x_0}{R S \cos\varphi_1} = p\,\frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0}{\cos\varphi_1}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda} = \operatorname{tg}\lambda\,\frac{x_1 - x_0}{R S \cos\varphi_1} = \operatorname{tg}\lambda\,\frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0}{\cos\varphi_1}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_0} = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1}$$

Pour obtenir les dérivées de y_1 et z_1, il faut différentier les

expressions de y et z paramétrisées :

$$\begin{cases} dy = dy_0 + (\sin\beta - \sin\beta_0)\, dR + R\cos\beta\, d\beta - R\cos\beta_0\, d\beta_0 \\ dz = dz_0 + S(\beta-\beta_0)\,\mathrm{tg}\,\lambda\, dR + SR\,\mathrm{tg}\,\lambda\, d\beta \\ \qquad - SR\,\mathrm{tg}\,\lambda\, d\beta_0 + \dfrac{SR(\beta-\beta_0)}{\cos^2\lambda}\, d\lambda \end{cases}$$

puis faire $\beta = \beta_1$ et remplacer $d\beta_1$ par son expression en fonction de $d\beta_0$, $d(1/p)$ et $d\lambda$.

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} dy_1 &= dy_0 - RS(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0)\frac{dR}{R} - RS\sin\varphi_0\, d\varphi_0 \\ &\quad + RS\sin\varphi_1\left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1}\, d\varphi_0 - \frac{x_1-x_0}{RS\cos\varphi_1}\,\frac{dR}{R}\right) \\ &= dy_0 - \left[RS(\cos\varphi_1-\cos\varphi_0) + (x_1-x_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi_1\right]\frac{dR}{R} \\ &\quad - RS(\sin\varphi_0 - \mathrm{tg}\,\varphi_1\cos\varphi_0)\, d\varphi_0 \end{aligned}$$

d'où les dérivées, en posant $\Delta x = x_1 - x_0$, $\Delta y = y_1 - y_0$ et $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial y_1}{\partial z_0} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial(1/p)} &= p\left[RS(\cos\varphi_1-\cos\varphi_0) + \Delta x\,\mathrm{tg}\,\varphi_1\right] \\ &= p\left[\Delta x\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 - \Delta y\right] = pRS\,\frac{1-\cos\Delta\varphi}{\cos\varphi_1} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial\lambda} = \frac{\mathrm{tg}\,\lambda}{p}\,\frac{\partial y_1}{\partial(1/p)}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial\varphi_0} = RS\left[-\sin\varphi_0 + \mathrm{tg}\,\varphi_1\cos\varphi_0\right] = RS\,\frac{\sin\Delta\varphi}{\cos\varphi_1}$$

De la même manière :

$$dz_1 = dz_0 + tg\lambda \left[RS(\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{x_1 - x_0}{\cos\varphi_1} \right] \frac{dR}{R}$$
$$+ RS\, tg\lambda \left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1} - 1 \right) d\varphi_0 + \frac{RS(\varphi_1 - \varphi_0)}{\cos^2\lambda} d\lambda$$

D'où les dérivées, avec : $\Delta z = z_1 - z_0$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y_0} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial z_1}{\partial z_0} = 1$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial (1/p)} = p\, tg\lambda \left[\frac{\Delta x}{\cos\varphi_1} - RS\,\Delta\varphi \right] = p \left[tg\lambda \frac{\Delta x}{\cos\varphi_1} - \Delta z \right]$$
$$= pRS\, tg\lambda \left[\frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0}{\cos\varphi_1} - \Delta\varphi \right]$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \lambda} = RS\,\Delta\varphi + tg^2\lambda \frac{\Delta x}{\cos\varphi_1} = \Delta z\, cotg\lambda + tg^2\lambda \frac{\Delta x}{\cos\varphi_1}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \varphi_0} = RS\, tg\lambda \left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1} - 1 \right)$$

Remarquons que ces expressions restent valables si on attribue à p (et 1/p) le signe physique de la particule.

A 1.4. PROPAGATION AU VERTEX.

Le vertex ajusté à partir des différentes traces étant en (Y, Y, Z), on cherche à définir une matrice d'erreurs sur $1/p$, λ, φ seulement, au point où la trace s'approche le plus de (Y, Y, Z). Cette condition s'écrit aussi :

$$(x - X)\, dx + (y - Y)\, dy + (z - Z)\, dz = 0$$

Avec la même paramétrisation que précédemment, on obtient :

$$[x_0 + R(\cos\beta - \cos\beta_0) - X](-R\sin\beta\, d\beta) + [y_0 + R(\sin\beta - \sin\beta_0)] R\cos\beta\, d\beta$$
$$+ [z_0 + SR\, tg\lambda\, (\beta - \beta_0) - Z]\, SR\, tg\lambda\, d\beta = 0$$

d'où :
$$-(x_0 - R\cos\beta_0 - X)\sin\beta + (y_0 - R\sin\beta_0 - Y)\cos\beta + R\,tg^2\lambda\,(\beta-\beta_0) + S\,tg\,\lambda\,(z_0 - Z) = 0$$

Cette équation détermine implicitement β en fonction de y_0, z_0, R, β_0 et λ Soit α sa solution. En différentiant, on obtient les dérivées partielles de α par rapport à ces cinq paramètres :

$$\left[(X - x_0 + R\cos\beta_0)\cos\alpha + (Y - y_0 + R\sin\beta_0)\sin\alpha + R\,tg^2\lambda\right] d\alpha$$

$$= \left[\cos\beta_0\sin\alpha - \sin\beta_0\cos\alpha + tg^2\lambda\,.\,(\alpha-\beta_0)\right](-dR)$$

$$-\cos\alpha\,dy_0 - S\,tg\,\lambda\,dz_0 + \left[\frac{2R(\beta_0-\alpha)\,tg\,\lambda}{\cos^2\lambda} + S\,\frac{Z-z_0}{\cos^2\lambda}\right] d\lambda$$

$$+ R\,(\sin\beta_0\sin\alpha + \cos\beta_0\cos\alpha + tg^2\lambda)\,d\beta_0$$

Le point (X, Y, Z) étant très proche de la trace, on peut écrire :

$$\begin{cases} X \simeq x_0 + R(\cos\alpha - \cos\beta_0) \\ Y \simeq y_0 + R(\sin\alpha - \sin\beta_0) \\ Z \simeq z_0 + SR\,tg\,\lambda\,(\alpha-\beta_0) \end{cases}$$

Ce qui simplifie les coefficients de $d\alpha$ et $d\lambda$ dans l'expression précédente ; en posant $\Delta\varphi = \alpha - \beta_0$, on trouve :

$$\frac{R}{\cos^2\lambda}\,d\alpha = (\sin\Delta\varphi + \Delta\varphi\,tg^2\lambda)(-dR) - \frac{R\Delta\varphi}{\cos^2\lambda}\,tg\,\lambda\,d\lambda$$
$$-\cos\alpha\,dy_0 - S\,tg\,\lambda\,dz_0$$
$$+ R(\cos\Delta\varphi + tg^2\lambda)\,d\beta_0$$

En remplaçant dR/R par $-p\,d(1/p) - tg\,\lambda\,d\lambda$ et α par $\Phi = \alpha + S\frac{\pi}{2}$, on trouve :

$$d\Phi = (\cos^2\lambda \sin\Delta\varphi + \Delta\varphi \sin^2\lambda)\,[p\,d(1/p) + tg\,\lambda\,d\lambda]$$
$$- \Delta\varphi\, tg\,\lambda\, d\lambda - \frac{\sin\Phi\cos^2\lambda}{SR}\,dy_0 - \frac{tg\,\lambda\cos^2\lambda}{SR}\,dz_0$$
$$+ (\cos^2\lambda\cos\Delta\varphi + \sin^2\lambda)\,d\varphi_0$$

Ce qui fournit les dérivées de Φ par rapport aux paramètres définissant la trace en $x = x_0$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_0} = -\frac{\cos^2\lambda\,\sin\Phi}{SR}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z_0} = -\frac{\sin\lambda\,\cos\lambda}{SR}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(1/p)} = p\,(\cos^2\lambda\sin\Delta\varphi + \sin^2\lambda\,\Delta\varphi)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = \sin\lambda\cos\lambda\,(\sin\Delta\varphi - \Delta\varphi)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_0} = \cos^2\lambda\cos\Delta\varphi + \sin^2\lambda$$

Les paramètres $1/p$ et λ étant constants, ces dérivées suffisent à calculer la matrice de covariance de $(1/p, \lambda, \Phi)$ au vertex à partir de celle de $(y_0, z_0, 1/p, \lambda, \varphi)$ en $x = x_0$.

Notons que si $\Delta\varphi$ est petit, les trois dernières peuvent se simplifier :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial (1/p)} &\simeq p\,\Delta\varphi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} &\simeq 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{à un terme en } (\Delta\varphi)^3 \text{ près}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_0} \simeq 1 \qquad \text{à un terme en } (\Delta\varphi)^2 \text{ près}$$

On pouvait aussi considérer ce problème comme la combinaison d'une translation le long de la trace jusqu'au point le plus proche de (X, Y, Z) puis d'une rotation en ce point pour amener l'axe x dans la direction de la trace.

ANNEXE 2

AJUSTEMENTS PAR MOINDRES CARRES

Le but de cette annexe est de rappeler quelques résultats utiles pour l'exploitation et le contrôle d'ajustements linéarisés.

A 2.1. AJUSTEMENT PARAMETRIQUE.

Soient y_i $(i=1 \grave{a} n)$ les variables, y_i^{mes} leurs valeurs mesurées et σ leur matrice de covariance ; on pose $W = \sigma^{-1}$ (matrice des poids). Soient p_j $(j=1 \grave{a} m)$ les paramètres à ajuster ; les y_i dépendent des p_j par $y_i = F_i(p_j)$. Désignons par D la matrice des dérivées des variables par rapport aux paramètres :

$$D_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial p_j}$$

L'ajustement linéarisé consiste à rechercher le minimum de

$$\chi^2 = \sum_{i,k} w_{ik} \left[y_i^{mes} - F_i(p) \right] \left[y_k^{mes} - F_k(p) \right]$$

en remplaçant F_i par son développement au premier ordre en les $\Delta p_j = p_j - p_j^\circ$ au voisinage des valeurs approchées p_j° .

En posant $\Delta y_i = y_i^{mes} - F_i(p^\circ)$ on a :

$$y_i^{mes} - F_i(p) \simeq \Delta y_i - \sum_j D_{ij} \Delta p_j$$

D'où matriciellement :

$$\chi^2 = (\Delta y - D\,\Delta p)^t\, W\, (\Delta y - D\,\Delta p)$$

qui est une fonction quadratique des Δp_j ; son minimum est obtenu pour les valeurs de Δp_j qui vérifient l'équation :

$$(D^t W D)\,\Delta p = D^t W \Delta y$$

ce qui donne $\Delta p = A\,\Delta y$ avec $A = (D^t W D)^{-1} D^t W$

Ceci permet aussi de calculer la matrice de covariance de cet estimateur des paramètres (par abus de langage, on l'appellera simplement matrice de covariance des paramètres) :

$$\tau = A\,\sigma\,A^t = (D^t W D)^{-1} D^t \underbrace{W \cdot \sigma \cdot W}_{\mathbb{1}} D\,(D^t W D)^{-1}$$

donc $\tau = (D^t W D)^{-1} = (D^t \sigma^{-1} D)^{-1}$

Désignons maintenant par Y_i les valeurs "ajustées" des variables c'est à dire :

$$Y_i = F_i(p^\circ + \Delta p) = F_i(p^{aj})$$

On a alors

$$y_i^{mes} - Y_i = y_i^{mes} - F_i(p^\circ) + F_i(p^\circ) - F_i(p^\circ + \Delta p)$$

$$\simeq \Delta y_i - \sum_j D_{ij}\,\Delta p_j$$

Soit matriciellement :

$$y^{mes} - Y = \Delta y - D\,\Delta p = \Delta y - DA\,\Delta y = (\mathbb{1} - DA)\,\Delta y$$

D'où la matrice de covariance de $y^{mes} - Y$:

$$\varsigma = (\mathbb{1} - DA)\,\sigma\,(\mathbb{1} - DA)^t = \sigma - DA\sigma - \sigma A^t D^t + DA\,\sigma A^t D^t$$

Or $$DA\sigma = D(D^t W D)^{-1} D^t W \sigma = D(D^t W D)^{-1} D^t$$

Cette matrice, symétrique, est aussi égale à $\sigma A^t D^t$

d'autre part :

$$DA\sigma A^t D^t = D(D^t W D)^{-1} D^t W \sigma W D(D^t W D)^{-1} D^t = D(D^t W D)^{-1} D^t$$

d'où finalement :

$$\rho = \sigma - D(D^t W D)^{-1} D^t = \sigma - D\tau D^t$$

$D\tau D^t$ n'est autre que la matrice de covariance de Y.

La matrice de covariance de $y^{mes} - Y$ est donc la différence des matrices de covariance de y^{mes} et de Y ; ceci est intéressant car les quantités $y_i^{mes} - Y_i$ sont calculables à partir des variables mesurées, et fournissent un critère plus riche que le χ^2 pour contrôler que les hypothèses sur lesquelles repose l'ajustement sont légitimes, et en particulier que la matrice σ a été bien évaluée.

En effet les variables π_{ij} définies par :

$$\pi_{ij} = \frac{(y_i^{mes} - Y_i)(y_j^{mes} - Y_j)}{\sigma_{ij} - (D\tau D^t)_{ij}}$$

doivent avoir une valeur moyenne de 1.

Plus particulièrement on s'intéresse en pratique aux "pulls" des variables y_i :

$$q_i = \frac{y_i^{mes} - Y_i}{\sqrt{\sigma_{ii} - (D\tau D^t)_{ii}}}$$

qui doivent suivre une loi normale centrée de variance 1.

Si la matrice σ est fausse d'un facteur global λ , on voit que les π_{ij} auront une valeur moyenne $\frac{1}{\lambda}$, et les q_i une variance $\frac{1}{\lambda}$ ce qui permet de réajuster σ .

Si le facteur de correction n'est pas le même pour tous les éléments de σ , il n'y a pas de règle simple. Cependant, on peut remarquer que dans l'expression de ρ_{ii} , le terme σ_{ii} intervient tel quel positivement, et négativement dans $(D\,\tau\,D^t)_{ii}$, où un éventuel facteur de sur- ou sous-estimation est dilué. Le dénominateur de q_i est donc biaisé dans le même sens que σ_{ii}. Quant au numérateur, il est lui aussi affecté dans le même sens que σ_{ii} en valeur quadratique moyenne (l'écart a tendance à augmenter si l'incertitude augmente, car cela revient à diminuer le poids de y_i^{mes} dans l'ajustement), mais d'une façon atténuée. On s'attend donc en général à ce que la variance de q_i soit biaisée en sens inverse de σ_{ii} , ce qui donne un critère (qualitatif seulement) pour le réajustement de σ_{ii} si on observe une variance de q_i différente de 1.

Les arguments présentés ne sont pas rigoureux et, en particulier, négligent l'effet de corrélations ; ce critère ne peut donc servir qu'à orienter des tâtonnements.

A 2.2. AJUSTEMENT NON PARAMETRIQUE AVEC CONTRAINTES :

Comme précédemment, on note y_i les variables et σ leur matrice de covariance. On impose les contraintes $F_k(y) = 0$ (k = 1 à p).

Si les valeurs de y_i^{mes} vérifient approximativement les contraintes, on peut linéariser au voisinage des y_i^{mes} , avec $\Delta y_i = y_i^{mes} - y_i$

$$F_k(y_i) = F_k(y_i^{mes}) - \sum_i \frac{\partial F_k}{\partial y_i}\,\Delta y_i$$

$$= R_k - \sum_i \partial_{ki}\,\Delta y_i$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de ramener la recherche au minimum du χ^2 avec les contraintes, à la résolution du système :

$$\begin{cases} \Psi = \chi^2 + \sum_k \lambda_k F_k & \text{minimum par rapport aux } y_i \\ F_k = 0 & \text{pour } k = 1 \text{ à } p \end{cases}$$

ce qui donne ici en linéarisant (matriciellement) :

$$\Psi = \Delta y^t W \Delta y + \lambda^t (R - \mathcal{D} \Delta y) \quad \text{minimum}$$

d'où $$2 W \Delta y - \mathcal{D}^t \lambda = 0$$

donc $$\Delta y = \frac{1}{2} \sigma \mathcal{D}^t \lambda$$

et pour les contraintes :

$$R = \mathcal{D} \Delta y = \frac{1}{2} \mathcal{D} \sigma \mathcal{D}^t \lambda$$

ce qui fournit $$\lambda = 2 (\mathcal{D} \sigma \mathcal{D}^t)^{-1} R$$

et par conséquent $$\Delta y = \sigma \mathcal{D}^t (\mathcal{D} \sigma \mathcal{D}^t)^{-1} R$$

d'où les valeurs ajustées $$Y = y^{mes} - \Delta y$$

Une autre méthode consiste à choisir $(n-p)$ variables (par exemple y_1 à y_{n-p}) comme paramètres et à exprimer les autres en fonction de celles-là (sous réserve que les contraintes le permettent au voisinage des valeurs mesurées).

Dans l'approximation linéaire, la contrainte s'écrit :

$$F_k (y_i) = R_k + \sum_{i \leq n-p} \mathcal{D}_{ki} \Delta y_i + \sum_{j > n-p} \mathcal{D}_{kj} \Delta y_j = 0$$

Notons H la restriction de $\mathcal{D}$ aux $n-p$ premières variables (c'est une matrice $p \times (n-p)$) et G la matrice carrée (p x p) restante (supposée inversible), les équations de contrainte s'écrivent alors, avec $j' = j + n - p$

$$\Delta y_{j'} = \sum_{l<n-p} M_{jl} \, \Delta y_l - V_j$$

avec $M = -G^{-1}H$ et $V = G^{-1}R$

Désignons par δy la restriction de Δy aux (n - p) premières variables, et $W_{aa}, W_{ab}, W_{ba}, W_{bb}$ les blocs découpés dans W par la séparation des variables. Le χ^2 s'écrit alors :

$$\chi^2 = \delta y^t W_{aa} \delta y + \delta y^t W_{ab} (M\delta y - V) + \text{transp.} + (M\delta y - V)^t W_{bb} (M\delta y - V)$$

La condition de minimum donne :

$$(W_{aa} + W_{ab} M + M^t W_{ba} + M^t W_{bb} M) \delta y = (W_{ab} + M^t W_{bb}) V$$

ce qui fournit par résolution du système δy, c'est à dire les Y_i pour $i \leq n-p$. Les autres Y_i s'en déduisent par les équations de contrainte.

Cette méthode est intéressante si on connaît au départ W et non pas σ (la seule matrice à inverser est alors de dimension n - p) ; c'est le cas si les Y_i^{mes} ne sont pas des mesures brutes, mais sont elles-mêmes le résultat d'un ajustement paramétrique préalable.

Les deux méthodes sont évidemment équivalentes : avec les mêmes valeurs de départ, elles donnent exactement les mêmes valeurs ajustées. On peut le vérifier explicitement à partir des expressions formelles.

La première méthode fournit : $\Delta y = \sigma \mathcal{D}^t (\mathcal{D} \sigma \mathcal{D}^t)^{-1} R$

En découpant certaines matrices en blocs suivant les n - p premières variables d'une part, les p dernières d'autre part, on peut écrire la restriction de Δy à δy :

$$\delta y = [\mathbb{1} \; 0] \, \Delta y = [\mathbb{1} \; 0] \, \sigma \mathcal{D}^t (\mathcal{D} \sigma \mathcal{D}^t)^{-1} R$$

et l'équation qui doit vérifier δy d'après la 2ème méthode :

$$[\mathbb{1} \; M^t] \, W \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ M \end{bmatrix} \delta y = [\mathbb{1} \; M^t] \, W \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix}$$

Détaillons le premier membre de cette équation :

$$[\mathbb{1} \; M^t] \, W \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ M \end{bmatrix} [\mathbb{1} \; 0]} \, \sigma \mathcal{D}^t (\mathcal{D} \sigma \mathcal{D}^t)^{-1} R$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ M & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M & -\mathbb{1} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbb{1} - \begin{bmatrix} 0 \\ G^{-1} \end{bmatrix} [H \; G] = \mathbb{1} - \begin{bmatrix} 0 \\ G^{-1} \end{bmatrix} \mathcal{D}$$

d'après la définition de M.

Ce dernier membre se décompose alors en deux termes :

$$[\mathbb{1} \; M^t] \underbrace{W \mathbb{1} \sigma}_{\mathbb{1}} \mathcal{D}^t (\mathcal{D} \sigma \mathcal{D}^t)^{-1} R = \underbrace{[\mathbb{1} \; M^t] \mathcal{D}^t}_{[\mathbb{1} - (G^{-1}H)^t] \begin{bmatrix} H^t \\ G^t \end{bmatrix} = 0} (\mathcal{D} \sigma \mathcal{D}^t)^{-1} R \qquad (1)$$

$$[\mathbb{1} \; M^t] \, W \begin{bmatrix} 0 \\ G^{-1} \end{bmatrix} \underbrace{\mathcal{D} \sigma \mathcal{D}^t (\mathcal{D} \sigma \mathcal{D}^t)^{-1}}_{\mathbb{1}} R = [\mathbb{1} \; M^t] \, W \begin{bmatrix} 0 \\ G^{-1} \end{bmatrix} R \qquad (2)$$

$$= [\mathbb{1} \; M^t] \, W \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix}$$

On trouve donc bien que δy défini par la 1ère méthode vérifie l'équation de la 2ème méthode.

ANNEXE 3

CAUSES D'ERREURS NON GAUSSIENNES.

A 3.1. INTRODUCTION.

L'hypothèse que les erreurs de mesure peuvent être considérées comme gaussiennes est le fondement de la méthode des moindres carrés pour l'ajustement des paramètres. Elle permet aussi de calculer une probabilité associée à un χ^2, dont la distribution doit être uniforme entre 0 et 1 si les erreurs sont correctement évaluées au départ.

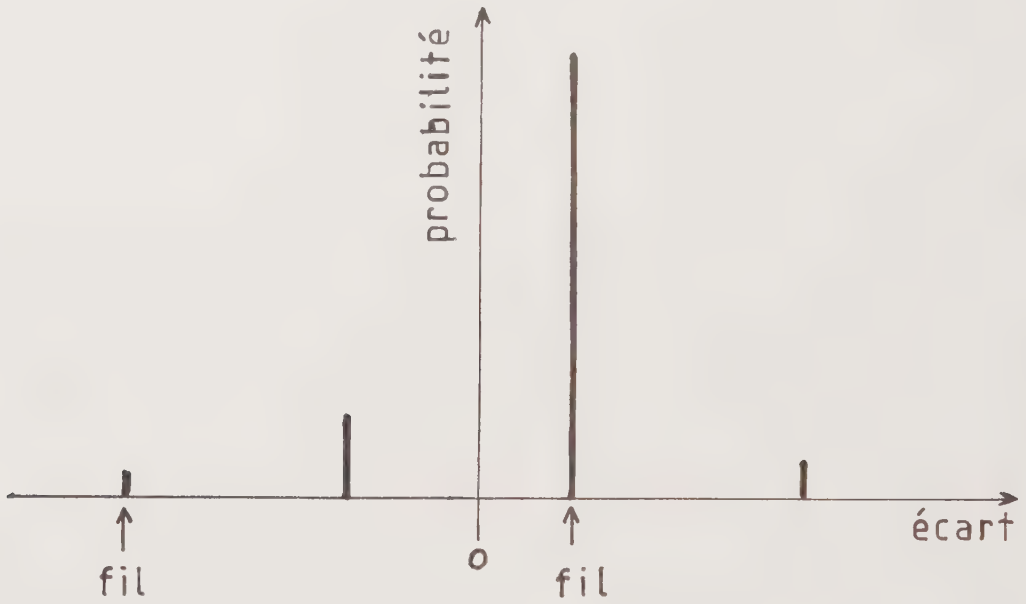
En réalité, la loi gaussienne est rarement applicable à une mesure élémentaire. Elle le devient approximativement pour une combinaison d'un grand nombre de mesures de variance finie ; il existe cependant des causes d'erreurs qui peuvent éloigner notablement d'une loi gaussienne la distribution des écarts entre les paramètres vrais et ceux qui sont calculés à partir des mesures. Les distributions de probabilité en sont perturbées, sans qu'un réajustement des incertitudes de mesure puisse les rendre uniformes.

Nous allons passer en revue certaines de ces causes (il peut, bien sûr, en exister beaucoup d'autres).

A 3.2. MESURES DISCRETES.

Les modules optiques fournissent par l'intermédiaire des caméras des mesures digitisées, donc discrètes, mais avec un pas petit devant l'incertitude : la mesure est quasi continue. Pour les chambres à fils, l'écart

entre la position réelle et la coordonnée entière (ou demi-entière si un nombre pair de fils adjacents est touché) suit une loi concentrée en un très petit nombre de points, dont un seul largement prédominant en général, du type



Si la trace est mesurée par un grand nombre de plans de fils, la limite gaussienne s'applique bien. Ceci n'est pas vrai pour la trace du faisceau, qui n'est parfois mesurée que par deux plans de fils, et jamais plus de 3 (les deux plans de B1 qui mesurent y ne donnent pas de mesures indépendantes car trop proches : leur information est redondante). Les écarts des paramètres ajustés (y, z, φ et λ en $x = x_o$) suivent eux aussi une loi concentrée en quelques points, et de forme variable.

Une circonstance aggravante apparaît pour le faisceau : son étalement angulaire étant petit, il y a une forte corrélation entre les coordonnées des fils touchés dans les chambres successives, ce qui accentue la concentration de la loi de probabilité des paramètres ajustés, et fausse le calcul de leurs corrélations.

Il en résulte aussi que l'estimation des erreurs à partir des résidus n'a plus de sens, même si on fait la moyenne sur un grand nombre de traces : si par exemple la direction moyenne du faisceau correspond à une direction d'alignement des fils des différentes chambres, le résidu nul sera le plus probable, et le résidu quadratique moyen sous-estimera l'incertitude de la mesure.

L'incidence de ces distributions discrètes sur l'ajustement de l'événement entier (au niveau géométrique du vertex, ou cinématique) dépendra des poids de la trace de faisceau par rapport aux autres : s'il est relativement faible, la position du vertex et le bilan d'impulsion-énergie en dépendront peu ; par contre sa contribution au χ^2 sera prépondérante, et la distribution de probabilité sera perturbée.

Par ailleurs, la limite gaussienne des grands nombres est atteinte moins vite si la distribution de probabilité de chaque mesure comporte une queue à longue portée, c'est à dire qu'elle n'est pas négligeable au-delà de quelques écarts-type (la distribution d'une combinaison de mesures aura alors, elle aussi, une queue à longue portée) ; c'est ce qui se produit à cause des erreurs accidentelles qui font attribuer à un point mesuré une fausse digitisation (dans une chambre à fils ou un module optique), ou une valeur erronée de la coordonnée correspondante :

- digitisation parasite remplaçant une digitisation absente, ou prise à la place de la bonne.
- Mauvaise traduction ou transmission électronique (erreur sur un bit par exemple).
- Erreur dans les données numériques du programme de reconstruction etc...

Ce type d'erreurs (qu'on espère peu fréquent) est limité en amplitude par les tolérances qu'on fixe sur l'écart d'un point par rapport à la trace ajustée, ou d'une façon générale sur tout écart anormal. Toutefois ces tolérances doivent être assez larges : en pratique, elles correspondent à des probabilités de dépassement de l'ordre de $1°/_{oo}$ au plus dans l'hypo-

thèse gaussienne. Mais ces erreurs accidentelles ont une distribution plus étalée qu'une gaussienne, voire uniforme, donc les écarts importants deviennent ainsi plus probables que ne le prévoit la loi gaussienne : il en sera de même (de façon atténuée par le nombre de points) sur les paramètres de la trace entière : la distribution de probabilité sera enrichie aux faibles valeurs.

/

A 3.3. DISTORSIONS.

Une distorsion non corrigée se traduit par le fait que la trajectoire apparente est déformée, d'une façon plus ou moins complexe : les degrés de liberté de l'ajustement permettent de compenser en partie cette déformation. Par exemple, une distorsion qui se ramène à un écart en y (petit) fonction quadratique de x est presque complètement absorbée par une variation de la courbure et de y, φ au point de départ de la trace.

Il en résulte des erreurs sur les paramètres, qui ne sont pas forcément systématiques, et qui ne sont pas prises en compte dans la matrice d'erreurs, même si celles-ci sont calculées à partir du résidu moyen sur la trace en question, car ce résidu moyen ne reflète, en plus des erreurs de mesure proprement dites, que la partie non compensée de la distorsion. En outre, l'erreur théorique sur un paramètre diminue statistiquement avec le nombre de points de mesure, alors que l'erreur due à la distorsion peut avoir un comportement différent. Là encore, il y aura accumulation d'événements aux basses probabilités.

A 3.4. DIFFUSION SECONDAIRE DE LA TRACE.

Ce peut être une diffusion élastique hadronique vers l'avant, ou coulombienne (à relativement grand angle) par un noyau. Si elle se produit avant les points mesurés (dans la cible ou les scintillateurs qui l'entourent, par exemple) elle n'est pas visible lors de la reconstruction. Si

elle se produit à l'intérieur de l'intervalle de mesure, et que l'angle est assez petit, la cassure n'est pas détectée, et la trace ajustée est un compromis entre les deux portions qu'elle sépare. Dans les deux cas, cette diffusion est assimilable à une distorsion aléatoire et a les mêmes conséquences sur les résidus et la probabilité.

La probabilité d'une diffusion hadronique élastique à petit angle est proportionnelle à la matière traversée ; elle décroit exponentiellement avec l'angle, avec une pente qui dépend de la nature de la particule et de son impulsion. Dans cette expérience, elle est au plus de l'ordre de quelques °/₀₀ si on se limite aux angles inférieurs à 1 mrad.

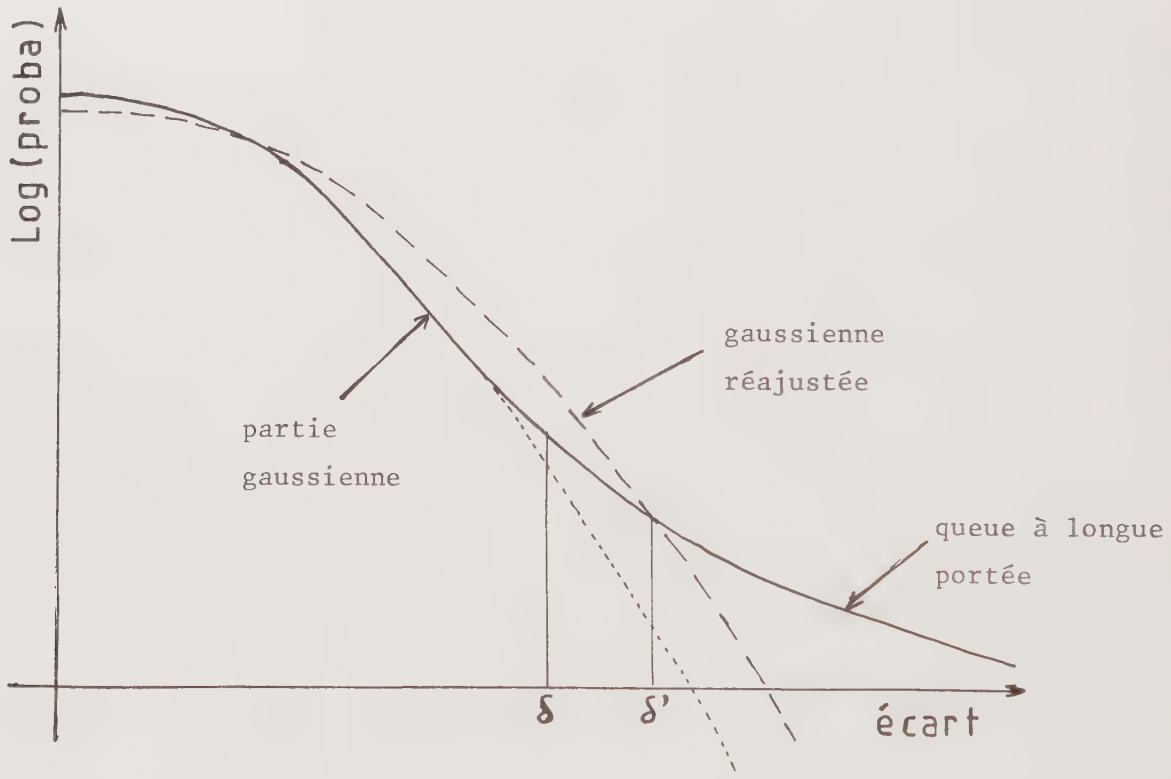
Pour la diffusion coulombienne, on peut montrer (voir par exemple J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, p. 650) que la distribution angulaire est gaussienne aux petits angles (diffusion multiple), avec une faible queue en puissance - 4 de l'angle, dont l'importance relative est invariable : ainsi la probabilité d'une diffusion à un angle supérieur à 3 écarts-type est de l'ordre de 1,2% (dont 0,3% seulement attribuables à la partie gaussienne). Pour de nombreuses traces, la diffusion multiple contribue au moins autant que les erreurs de mesure aux incertitudes sur les paramètres au vertex. Cela signifie, pour ces traces, qu'elles ont une probabilité de l'ordre de 1% de subir une diffusion "anormale" (supérieure à 3 écarts-type pour fixer les idées). Ceci en supposant, naturellement, que la matrice d'erreurs inclut correctement la contribution gaussienne de la diffusion multiple, ce qui est, en soi , n'est pas si simple (cf. annexe 4). Sinon, même la contribution gaussienne prend un caractère anormal.

A 3.5. DEFORMATION DE LA DISTRIBUTION DE PROBABILITE.

On peut résumer la situation de la façon suivante : la distribution des écarts des paramètres ajustés à partir des mesures, par rapport à leurs

valeurs réelles, est à peu près gaussienne, avec des contributions discrètes, et des queues à longue portée. Il en résulte que les probabilités qu'on calcule à partir des matrices d'erreurs décrivant les parties gaussiennes, voient leur distribution déformée, et en particulier les queues introduisent une accumulation aux basses probabilités.

Cette accumulation ne peut être compensée par un réajustement des matrices d'erreurs. Représentons par exemple la distribution en probabilité d'une quantité, affectée d'une queue à longue portée :



La transition de la partie gaussienne à la queue se fait pour un écart δ valant 2 à 4 écarts-type . Une gaussienne réajustée (de façon à avoir même variance que la distribution vraie) devient inférieure à celle-ci au-delà d'un écart δ' du même ordre que δ , donc dans la région des basses probabilités (inférieures à 10^{-2} ou 10^{-3}). La probabilité cal-

culée à partir de la variance réajustée aura donc un pic aux basses probabilités, compensé par un appauvrissement des probabilités moyennes ; les probabilités élevées pourront être légèrement enrichies (cas de la figure) ou appauvries (moins que les moyennes), suivant la normalisation à l'origine, c'est à dire la forme de la queue. De toute façon la déformation de la probabilité subsiste, et garde sa forte dissymétrie dans l'intervalle $[0, 1]$. Si on augmente l'incertitude pour diminuer le pic aux basses probabilités, on enrichit les probabilités élevées au détriment des probabilités moyennes.

En général on n'observe pas directement la distribution de probabilité des paramètres des traces (puisqu'on ne connaît pas leur vraie valeur) mais leur déformation se reflète dans la probabilité de χ^2 des divers ajustements qu'on peut effectuer. Le pic aux basses probabilités se superpose à la contribution du fond physique (événements non conformes à l'hypothèse faite) sans qu'on puisse évaluer leur importance respective.

ANNEXE 4

DIFFUSION MULTIPLE
ET AJUSTEMENT DE TRACES.

A 4.1. INTRODUCTION. POSITION DU PROBLEME.

A 4.2. AJUSTEMENT STANDARD : EVALUATION DE LA MATRICE D'ERREURS.

- A 4.2.1. Conventions générales et schématisation.
- A 4.2.2. Diffusion en un seul point de la trace.
- A 4.2.3. Diffusion uniformément répartie le long de la trace.
- A 4.2.4. Applications numériques pour WA 13.

A 4.3. AJUSTEMENT OPTIMAL : LA METHODE RECURRENTE.

- A 4.3.1. Propriétés générales de l'information.
- A 4.3.2. La méthode récurrente d'ajustement.
- A 4.3.3. Généralisations.

A 4.4. COMPARAISON ENTRE L'AJUSTEMENT OPTIMAL ET L'AJUSTEMENT STANDARD.

- A 4.4.1. Généralités.
- A 4.4.2. Diffusion en un seul point de la trace.
- A 4.4.3. Diffusion uniformément répartie.

A 4.5. CONCLUSION.

ANNEXE 4

DIFFUSION MULTIPLE ET AJUSTEMENT DE TRACES.

A 4.1. INTRODUCTION. POSITION DU PROBLEME.

La diffusion coulombienne multiple affecte les particules chargées qui traversent la matière, d'autant plus que leur impulsion est plus faible : il en résulte une imprécision sur la détermination des paramètres de la trace, qui s'ajoute à l'imprécision inhérente à l'appareillage de mesure.

Celui-ci est en général conçu de façon à comporter le moins de matière possible : cependant il contient nécessairement au moins un gaz à pression atmosphérique. Il en résulte, comme nous le verrons, que dans bien des cas, l'incertitude due à la diffusion multiple n'est pas négligeable par rapport à celle qui résulte de la mesure, et parfois elle est prédominante.

L'incertitude sur la position d'un point donné de la trace due à la diffusion est parfaitement calculable, et elle suit une loi pratiquement gaussienne (à part une faible queue en fonction puissance pour les grandes valeurs de l'écart) : le problème majeur est qu'elle résulte du cumul de toutes les diffusions élémentaires subies en amont, et donc qu'elle est fortement corrélée aux incertitudes sur les autres points, contrairement aux erreurs de mesure : celles-ci peuvent être supposées indépendantes si on a éliminé par une calibration appropriée les erreurs systématiques : si on effectue n mesures, l'incertitude qui en résulte sur les paramètres ajustés se comporte grosso modo en $1/\sqrt{n}$ (outre l'effet du bras de levier pour

l'angle et la courbure). L'erreur due à la diffusion augmente avec la longueur mesurée, et n'est pas compensée statistiquement par un accroissement de n. Avant tout calcul, on peut donc prévoir que la recherche d'une précision optimale n'a pas de solution évidente : minimiser la contribution des erreurs de mesure conduit à maximiser n, donc à mesurer la trace sur la plus grande longueur possible, mais par là même à augmenter l'importance de la diffusion. L'optimum résultera en général d'un compromis entre ces deux tendances.

Face à ce problème, deux attitudes sont possibles :

- Effectuer un ajustement standard , c'est à dire qui ne tient compte que des erreurs de mesure, et qui est optimal en l'absence de diffusion (c'est à dire que l'incertitude sur les paramètres ajustés est la plus petite qu'on puisse obtenir à partir de l'ensemble des mesures). On peut alors évaluer l'incertitude supplémentaire apportée à cet estimateur par la diffusion, et corriger la matrice d'erreurs après coup. Dans le paragraphe 2, nous donnons une expression analytique de cette matrice pour des cas schématisés et mettons en évidence la notion de longueur optimale de mesure (au-delà de laquelle l'utilisation de mesures supplémentaires dans l'estimateur standard ferait perdre de la précision).

- Rechercher un ajustement qui soit optimal par rapport à l'ensemble des erreurs (mesure et diffusion)et donc pour lequel une mesure supplémentaire ne peut jamais faire diminuer la précision. Drijard /35 / a proposé un formalisme optimal, qui a l'inconvénient d'exiger pour chaque trace le calcul et l'inversion de la matrice (n x n) de covariance sur les n points de mesure, d'où un temps de calcul prohibitif pour des traces longues, pour lesquelles justement la diffusion joue un rôle important. On peut aussi envisager des compromis, comme par exemple un ajustement par morceaux. Dans le paragraphe 3, nous développerons une méthode récurrente qui est mathématiquement équivalente à l'ajustement optimal, d'application universelle, et qui ne comporte que des manipulations de matrices de dimension fixe, égale au nombre de paramètres.

Nous calculons aussi la matrice d'erreurs qui résulte de cet ajustement et nous la comparons à celle de l'ajustement standard pour évaluer le gain en précision.

Nous considérons dans cette étude non seulement les paramètres cinématiques des traces (angles et courbure) mais aussi les paramètres de position. En effet la précision sur la position est importante à plusieurs égards :

- discrimination de l'appartenance ou non à un vertex (en particulier les V°).
- Détermination de la position exacte du vertex, dont dépend la direction de la trace en ce vertex, donc le bilan cinématique.

Rappelons enfin la formule qui donne la variance de l'angle de diffusion (en projection plane) pour une particule de charge Z, de vitesse v, d'impulsion p, traversant une épaisseur X d'un matériau dont la longueur de radiation est X_0

$$\Delta\alpha^2 = \left(\frac{KZ}{p\beta}\right)^2 \frac{X}{X_0} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

où K vaut environ 15 MeV (avec un facteur correctif pour les vitesses faibles).

La seule chose qui nous importe, c'est que pour une particule donnée d'impulsion donnée, $\Delta\alpha^2$ est proportionnel à X/X_0

A 4.2. AJUSTEMENT STANDARD : EVALUATION DE LA MATRICE D'ERREURS.

A 4.2.1. Conventions générales et schématisation.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que les points mesurés sur la trace sont équidistants (d'intervalle ℓ) de précision uniforme, et que le nombre n est assez grand pour qu'on puisse remplacer les sommations sur les points par des intégrales (ou, ce qui revient au même, ne garder que les termes de degré le plus élevé en n).

Nous ne considérerons que des traces peu courbées dans un champ magnétique uniforme vertical par convention, si bien qu'on peut les schématiser par une projection verticale rectiligne et une projection horizontale en arc de cercle, dont la courbure est donnée avec une bonne approximation par le terme quadratique d'un ajustement parabolique.

Ces conditions restrictives sont à peu près remplies dans beaucoup de cas réels, et les conclusions qu'on en tire sont sans doute qualitativement très générales. Une simulation numérique peut aisément décrire plus précisément telle ou telle situation particulière.

Pour simplifier l'écriture, nous remplaçons les coordonnées mesurées par leur écart par rapport aux coordonnées théoriques (celles qu'on obtiendrait en l'absence d'erreurs de mesure et de diffusion) : les paramètres ajustés auront donc une espérance mathématique nulle (en l'absence de biais) et leur variance se ramènera à leur carré moyen.

A 4.2.2. Diffusion en un seul point de la trace :

A 4.2.2.1. Notations générales.

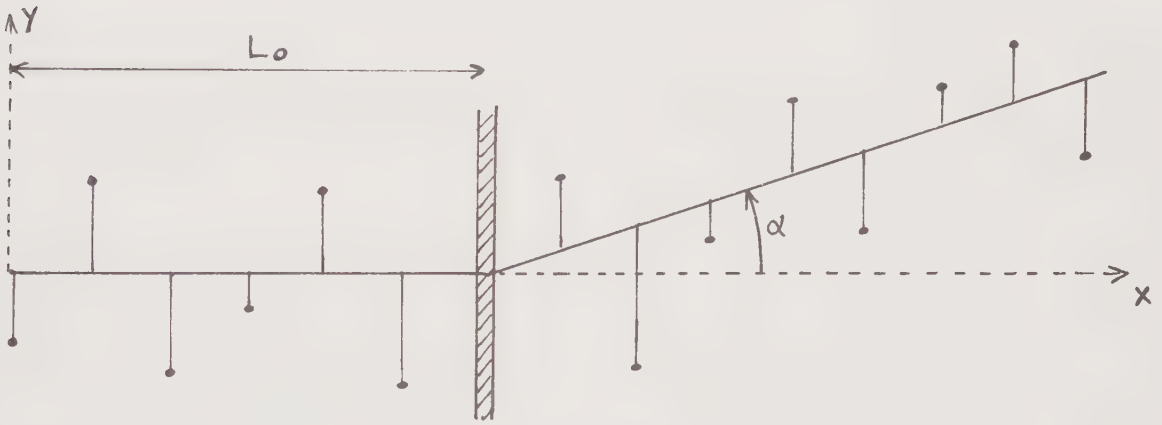
Nous supposerons que la trace traverse une épaisseur X de matière à une distance L_o de son premier point mesuré, et aucune matière ailleurs. Soit $n_o = L_o/\ell$ le nombre de points de mesure antérieurs à cette matière,

et $\Delta\alpha^2 = \left(\frac{KZ}{P\beta}\right)^2 \frac{X}{X_0}$ la variance de l'angle α de diffusion.

La coordonnée mesurée au point d'abscisse $x_i = il$, que nous noterons y_i pour l'ajustement parabolique (dans le plan horizontal) et z_i pour l'ajustement rectiligne (dans le plan vertical) auront donc pour expression :

$$\begin{cases} y_i = \delta y_i & \text{pour} \quad i \leq n_0 \\ y_j = \delta y_j + (j - n_0)\, l\alpha & \text{pour} \quad i > n_0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

(et la même chose pour les z_i).
Les δy_j sont des variables aléatoires de variance σ^2, et α une variable de variance $\Delta\alpha^2$, indépendantes entre elles.



L'ajustement standard fournit les paramètres Z et d d'une part (position du premier point et pente dans le plan vertical), Y, φ et $c = 1/R$ d'autre part (position et pente au premier point dans un plan horizontal, et courbure), comme combinaisons linéaires des coordonnées

mesurées, donc des variables aléatoires indépendantes δz_i (ou δy_i) et α. Il en résulte que les variances de ces paramètres seront les sommes des contributions des erreurs de mesure et de l'erreur de diffusion : nous pouvons donc les calculer séparément. Il en est de même pour la somme des carrés des résidus, donc pour le χ^2.

A 4.2.2.2. Ajustement rectiligne.

L'équation de la droite s'écrit :

$$z = Z + \lambda x$$

Les paramètres Z et λ se déduisent de l'équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} n & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i z_i \\ \sum_i x_i z_i \end{bmatrix}$$

L'inverse de la matrice (2 x 2) du membre de gauche est égale (après multiplication par σ^2) à la matrice V^{mes} de covariance des paramètres, en l'absence de diffusion.

On trouve facilement :

$$V^{mes} = \sigma^2 \begin{bmatrix} n & \frac{n^2}{2}\ell \\ \frac{n^2}{2}\ell & \frac{n^3}{3}\ell^2 \end{bmatrix}^{-1} = 12\,\sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3n} & -\frac{1}{2n^2\ell} \\ -\frac{1}{2n^2\ell} & \frac{1}{n^3\ell^2} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

ce qui donne, en posant $L = n\ell$ (longueur totale mesurée)

$$V_{ZZ}^{mes} = \frac{4\sigma^2}{n} \quad , \quad V_{\lambda\lambda}^{mes} = \frac{12\sigma^2}{nL^2}$$

$$V_{Z\lambda}^{mes} = -\frac{6\sigma^2}{nL}$$

Le χ^2 quant à lui a pour valeur moyenne :

$$\langle \chi^2 \rangle^{mes} = (n-2) \simeq n$$

Si maintenant nous ne tenons compte que de la variable α, nous obtenons pour le membre de droite de (2.1)

$$\sum_i z_i = \ell\alpha \sum_{i>n_o} (i-n_o) = \frac{(n-n_o)^2}{2}\,\ell\alpha$$

$$\sum_i x_i z_i = \ell^2\alpha \sum_{i>n_o} i(i-n_o) = \frac{(n-n_o)^2(2n+n_o)}{6}\,\ell^2\alpha$$

(on a évidemment supposé $n>n_o$)

On en déduit Z et λ en fonction de α :

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{4}{n}\,\ell\alpha\,\frac{(n-n_o)^2}{2} - \frac{6}{n^2\ell}\,\ell^2\alpha\,\frac{(n-n_o)^2(2n+n_o)}{6} \\ &= -\frac{n_o(n-n_o)^2}{n^2}\,\ell\alpha \\ \lambda &= -\frac{6}{n^2\ell}\,\ell\alpha\,\frac{(n-n_o)^2}{2} + \frac{12}{n^3\ell^2}\,\ell^2\alpha\,\frac{(n-n_o)^2(2n+n_o)}{6} \\ &= \frac{(n+2n_o)(n-n_o)^2}{n^3}\,\alpha \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

D'où la matrice de covariance :

$$\left.\begin{aligned} V_{zz}^{dif} &= \frac{n_o^2(n-n_o)^4}{n^4}\,\ell^2\Delta\alpha^2 \;,\quad V_{\lambda\lambda}^{dif} = \frac{(n+2n_o)^2(n-n_o)^4}{n^6}\,\Delta\alpha^2 \\ V_{z\lambda}^{dif} &= -\frac{n_o(n+2n_o)(n-n_o)^4}{n^5}\,\ell\Delta\alpha \end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

Pour toute quantité (cinématique par exemple) qui dépend de Z et λ, la variance sera combinaison linéaire des termes de la matrice $V^{tot} = V^{mes} + V^{dif}$

En supposant que n_o et ℓ soient fixés (ils le sont par l'appareillage, sauf pour les chambres à bulles) nous nous intéresserons à la variation de V^{tot} (donc des incertitudes sur les paramètres) en fonction de n (ou de L, ce qui revient au même), pour répondre à la question : jusqu'où faut-il mesurer la trace pour minimiser l'erreur sur les paramètres ?

Ainsi

$$V_{zz}^{tot} = \frac{4}{n}\sigma^2 + \frac{n_o^2(n-n_o)^4}{n^4}\ell^2\Delta\alpha^2$$

$$V_{\lambda\lambda}^{tot} = \frac{12}{n^3\ell^2}\sigma^2 + \frac{(n+2n_o)^2(n-n_o)^4}{n^6}\Delta\alpha^2$$

Les termes en σ^2 sont des fonctions décroissantes de n et tendent vers zéro pour $n \to \infty$. Les termes en $\Delta\alpha^2$ sont croissants et tendent vers des limites $V_{zz}^{\infty} = n_o^2\ell^2\Delta\alpha^2 = (L_o\Delta\alpha)^2$ et $V_{\lambda\lambda}^{\infty} = \Delta\alpha^2$ ce qui était prévisible.

Voyons maintenant si les variances totales passent par un mimimum, c'est à dire si leur dérivée par rapport à n s'annule.
En posant

$$\rho^2 = \frac{n_o^3\ell^2\Delta\alpha^2}{\sigma^2} = \frac{(L_o\Delta\alpha)^2}{(\sigma^2/n_o)} \qquad (2.5)$$

l'annulation de la dérivée donne :

pour V_{zz} : $$\left(\frac{n-n_o}{n}\right)^3\rho^2 = 1$$

pour $V_{\lambda\lambda}$: $$\frac{(n+2n_o)(n-n_o)^3}{n_o n^3}\rho^2 = 1$$

On en déduit que $V_{\lambda\lambda}$ passe toujours par un minimum et que V_{zz} passe par un minimum si et seulement si $\varrho > 1$.

On peut interpréter ϱ comme mesurant l'importance relative de la diffusion par rapport aux erreurs de mesure, dans notre problème : c'est le rapport de $L_o \Delta\alpha$ (erreur de diffusion ramenée à l'origine) sur $\sigma/\sqrt{n_o}$ (erreur sur la moyenne de n_o mesures indépendantes).

A ce propos, il faut souligner la fausseté du critère naïf qu'on peut énoncer ainsi : un point de mesure améliore l'ajustement tant que l'erreur due à la diffusion est inférieure à l'erreur de mesure sur ce point. Ce critère amènerait à poursuivre les mesures jusqu'à des longueurs L telles que $\frac{(L-L_o)\,\Delta\alpha}{\sigma} \lesssim 1$, c'est à dire, en général, bien au-delà du minimum des variances, tel que nous l'évaluons plus loin.

Il est intéressant de calculer un ordre de grandeur de ϱ pour des conditions expérimentales courantes. Par exemple pour $X = 10^{-2} X_o$, P = 1.5 GeV/c, on a $\Delta\alpha = 1$ mrad . Si L_o = 1 m, n_o = 25 et σ = 0.5 mm on trouve ϱ = 10. La condition $\varrho > 1$ est donc largement vérifiée dans ce cas.

Si $\varrho \gg 1$ on voit que les minima de V_{zz} et de $V_{\lambda\lambda}$ seront atteints pour $n/n_o \simeq 1 + \varrho^{-2/3}$, c'est à dire une valeur de n à peine supérieure à n_o. Dans ce cas l'appareillage couvre sans doute la trace au-delà de ces minima ; c'est encore probable pour des valeurs modérées de ϱ .

Ceci nous amène à la notion de longueur optimale de mesure (éventuellement inférieure à la longueur accessible), notion déjà utilisée en chambre à bulles : les points mesurés au-delà de cette longueur L_{opt} font diminuer la précision de l'ajustement standard. Elle a

l'inconvénient, si ρ n'est pas très grand, de n'être pas la même pour Z et pour λ .

La figure A 4.1 représente $\sqrt{V_{ZZ}}$ et $\sqrt{V_{\lambda\lambda}}$ en fonction de n pour plusieurs valeurs de ρ .

Evaluons maintenant la contribution de la diffusion au χ^2

$$\sigma^2 \chi^{2\,dif} = \sum_{i \le n_0} (Z + \lambda x_i)^2 + \sum_{i > n_0} [Z + \lambda x_i - \alpha \ell (i - n_0)]^2$$

Connaissant les expressions des valeurs moyennes $\langle Z^2 \rangle$, $\langle \lambda^2 \rangle$, $\langle Z\lambda \rangle$, $\langle \alpha^2 \rangle$, $\langle \alpha Z \rangle$ et $\langle \alpha \lambda \rangle$ à partir de (2.4), on peut calculer

$$\langle \chi^2 \rangle^{dif} = \frac{n_0^3 (n - n_0)^3}{3 n^3} \frac{\ell^2 \Delta\alpha^2}{\sigma^2} \qquad (2.6)$$

ou encore

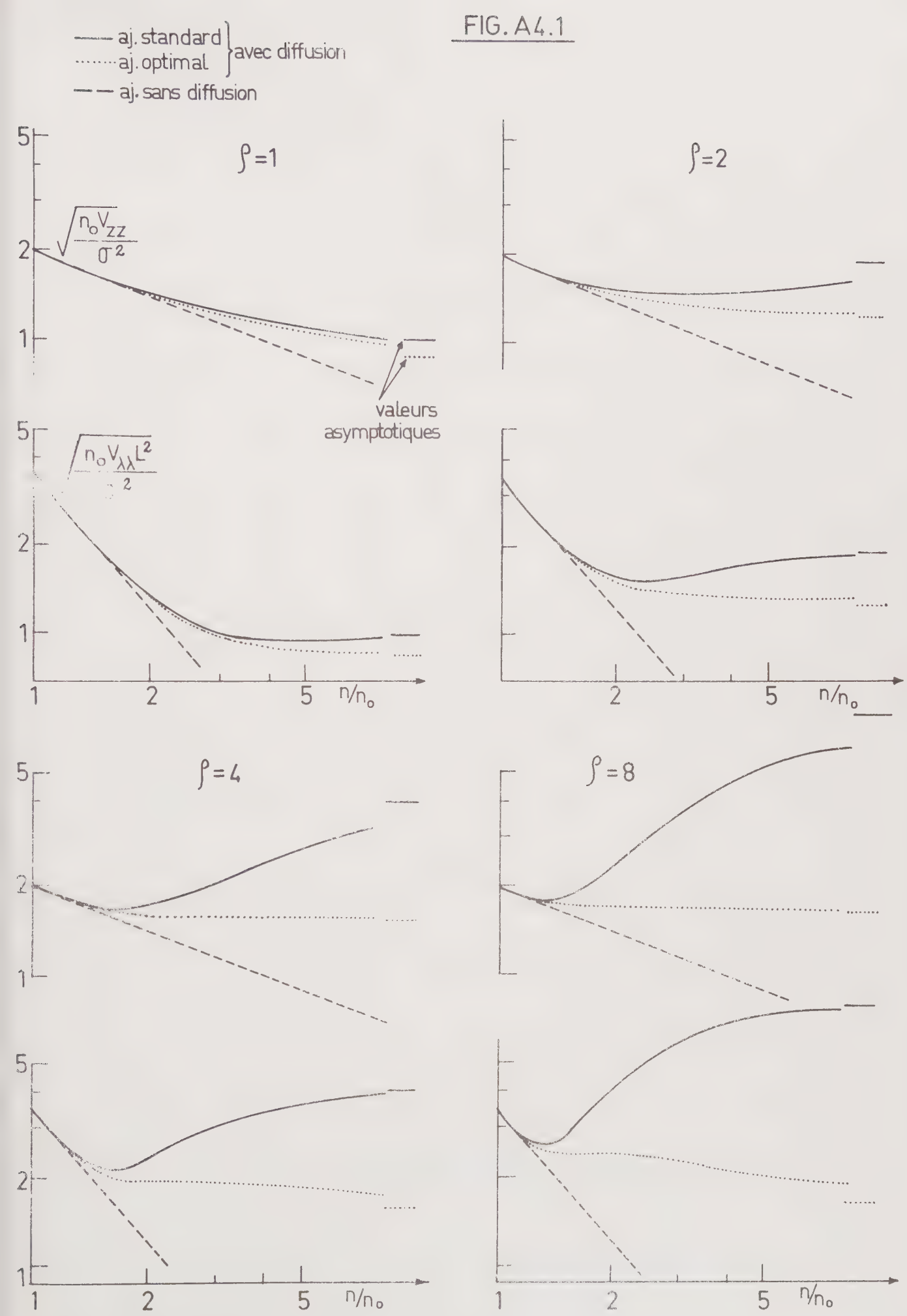
$$\frac{\langle \chi^2 \rangle^{dif}}{n} = \frac{n_0 (n - n_0)^3}{3 n^4} \frac{L_0^2 \Delta\alpha^2}{\sigma^2} = \frac{(n - n_0)^3}{3 n^4} \rho^2 \qquad (2.7)$$

Pour n_0 fixé, cette fonction de n passe par un maximum pour $n = 4\, n_0$, qui vaut $\frac{9}{256} \frac{\rho^2}{n_0} \simeq 0.0352 \frac{\rho^2}{n_0}$

Si $\rho \gg 1$, on a, pour $L = L_{opt}$, $\frac{\langle \chi^2 \rangle^{dif}}{n} \simeq \frac{1}{3 n_0}$

La diffusion multiple amène donc une augmentation relative en général beaucoup plus faible pour le χ^2 que pour la variance des paramètres. Avec les mêmes valeurs numériques que précédemment, on trouve que $\langle \chi^2 \rangle^{dif}/n \le 0.141$ alors que $\langle \chi^2 \rangle^{mes}/n \simeq 1$. En d'autres termes χ^2/n reste en moyenne proche de 1 (bien que sa distribution puisse être différente de celle d'un χ^2 classique à n degrés de liberté).

FIG. A4.1


aj. standard
aj. optimal
avec diffusion
aj. sans diffusion
ρ=1
ρ=2
ρ=4
ρ=8
$\sqrt{\frac{n_o V_{zz}}{\sigma^2}}$
$\sqrt{\frac{n_o V_{\lambda\lambda} L^2}{\sigma^2}}$
valeurs asymptotiques
n/n_o
1
2
5

A 4.2.2.3. Ajustement parabolique.

L'équation de la parabole s'écrit :

$$y = Y + \varphi x + \frac{c}{2} x^2$$

Les paramètres Y, φ et $\frac{c}{2}$ se déduisent de :

$$\begin{bmatrix} n & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \\ \cdots & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 \\ \cdots & \cdots & \sum_i x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \varphi \\ \frac{c}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

(pour les matrices symétriques, nous ne donnerons explicitement désormais que le triangle supérieur)
et on peut écrire :

$$V^{mes} = \sigma^2 \begin{bmatrix} n & \frac{n^2}{2}\ell & \frac{n^3}{3}\ell^2 \\ \cdots & \frac{n^3}{3}\ell^2 & \frac{n^4}{4}\ell^3 \\ \cdots & \cdots & \frac{n^5}{5}\ell^4 \end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{n} \begin{bmatrix} 9 & -\frac{36}{L} & \frac{30}{L^2} \\ \cdots & \frac{192}{L^2} & -\frac{180}{L^3} \\ \cdots & \cdots & \frac{180}{L^4} \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

dans les variables $Y, \varphi, \frac{c}{2}$.
Si on ne tient compte que de la diffusion :

$$\sum_i y_i = \frac{(n-n_o)^2}{2} \ell\alpha$$

$$\sum_i x_i y_i = \frac{(n-n_o)^2(2n+n_o)}{6} \ell^2\alpha$$

$$\sum_i x_i^2 y_i = \frac{(n-n_o)^2(3n^2+2n_o n+n_o^2)}{12} \ell^3\alpha$$

D'où

$$Y = \frac{(n-n_o)^2 n_o(5n_o-2n)}{2n^3} \ell\alpha$$

$$\varphi = \frac{(n-n_o)^2(n-3n_o)(n+5n_o)}{n^4} \alpha$$

$$\frac{c}{2} = \frac{15(n-n_o)^2 n_o^2}{n^5} \frac{\alpha}{\ell}$$

D'où les termes de la matrice V^{dif}

$$V^{dif} = (n-n_o)^4 \Delta\alpha^2 \times$$

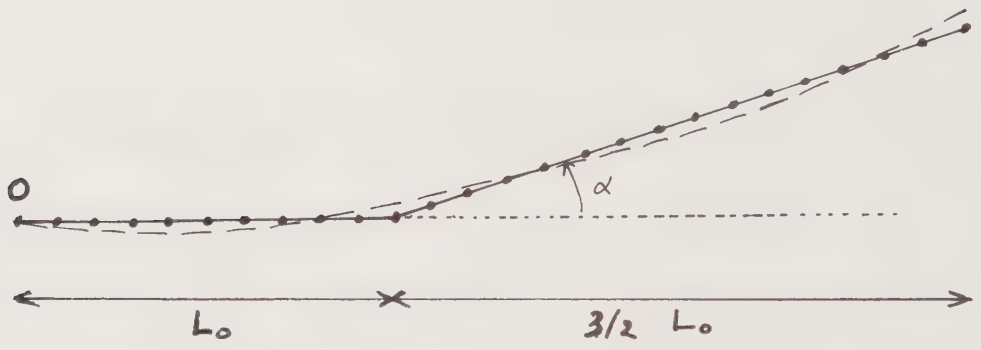
$$\begin{bmatrix} \frac{n_o^2(2n-5n_o)^2}{4n^6}\ell^2 & \frac{n_o(5n_o-2n)(n-3n_o)(n+5n_o)}{2n^7}\ell & \frac{15n_o^3(5n_o-2n)}{n^8} \\ \cdots & \frac{(n-3n_o)^2(n+5n_o)^2}{n^8} & \frac{30n_o^2(n-3n_o)(n+5n_o)}{n^9\ell} \\ \cdots & \cdots & \frac{225\,n_o^4}{n^{10}\ell^2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

On voit qu'ici encore les variances de γ et φ tendent pour $n \to \infty$ vers les limites prévisibles ($L_o^2 \Delta\alpha^2$ et $\Delta\alpha^2$ respectivement)

Par contre V_{cc}^{dif} tend vers zéro, ce qui était aussi prévisible, après un maximum éventuel. Il en résulte que l'incertitude sur toute quantité qui n'est pas fonction que de la courbure tend vers une limite non nulle.

Il est à noter que, quelque soit ρ, $V_{\gamma\gamma}^{dif}$ s'annule pour $n = 5/2\, n_o$ et $V_{\varphi\varphi}^{dif}$ s'annule pour $n = 3\, n_o$. Il en résulte que leurs courbes représentatives seront, pour toute valeur de ρ, tangentes en ce point à la courbe obtenue pour $\rho = 0$ (une droite en coordonnées log - log sur la fig. 2).

Ce fait peut s'interpréter géométriquement : la meilleure parabole (au sens des moindres carrés) ajustée sur les points suivants :



passe exactement par le point 0 (quel que soit α *).*

De même la meilleure parabole obtenue avec un deuxième segment de longueur $2L_o$ *, a une tangente horizontale à l'abscisse* $x = 0$.

Cette propriété s'applique aussi aux cercles si α *est assez petit.*

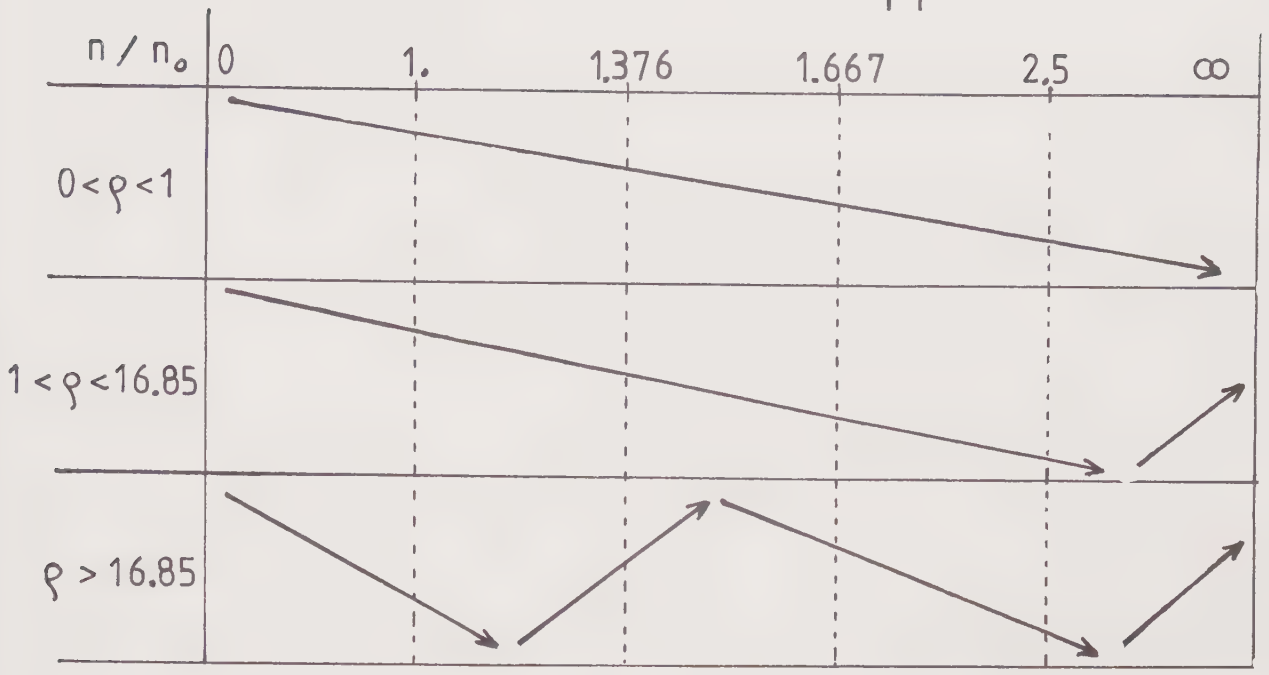
L'étude des variances totales $V^{tot} = V^{mcs} + V^{dif}$ en fonction de n amène à des équations algébriques de degré plus ou moins élevé. Nous donnons dans le tabl.A 4.1 leur comportement selon la valeur du même paramètre $\rho = \frac{\sqrt{n_o L_o \Delta\alpha}}{\sigma}$ que dans 2.2.2.

Pour $\rho \gg 1$, le premier minimum de V_{YY}, $V_{\varphi\varphi}$ et V_{cc} se situe à $n/n_o \simeq 1 + \rho^{-2/3}$, comme pour V_{ZZ} et $V_{\lambda\lambda}$ dans l'ajustement rectiligne ; le second minimum de V_{YY} à $n/n_o \simeq \frac{5}{2} + \frac{625}{18\rho^2}$ et celui de $V_{\varphi\varphi}$ à $n/n_o \simeq 3 + \frac{729}{32\rho^2}$.

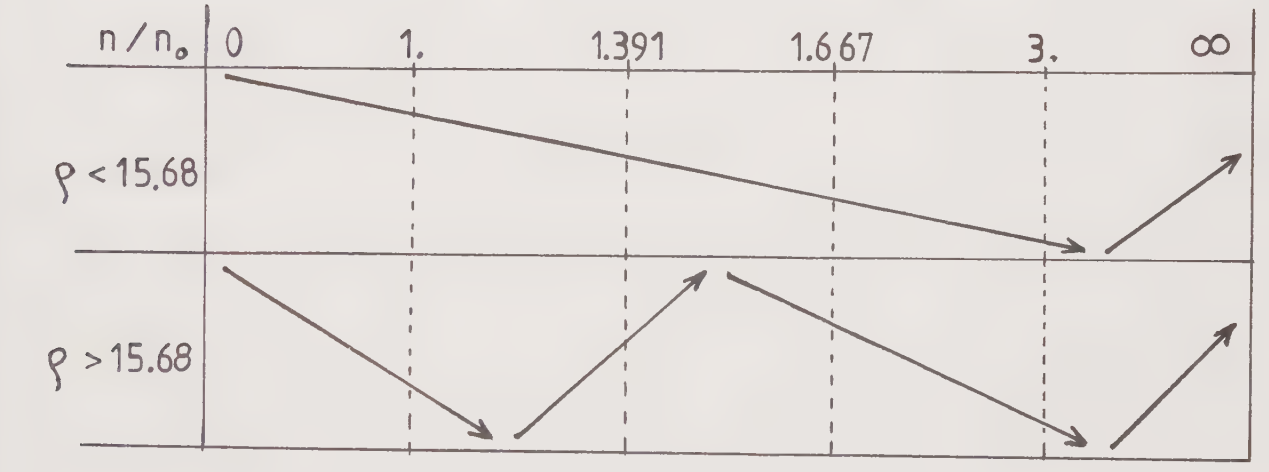
Ce tableau, ainsi que la figure A 4.2, montrent que la notion de longueur optimale s'impose dans bien des cas, et qu'elle dépend de la quantité sur laquelle on veut le plus de précision. Cette longueur optimale se situe, soit un peu au delà de L_o , soit nettement plus loin.

TABLEAU A.4-1

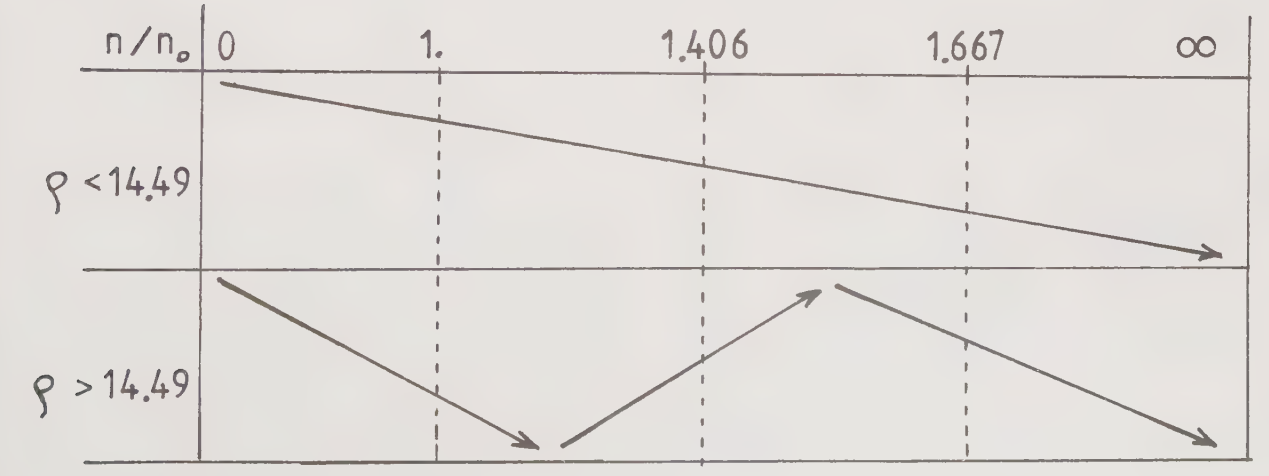
variation de V_{YY}



variation de $V_{\varphi\varphi}$



variation de V_{cc}



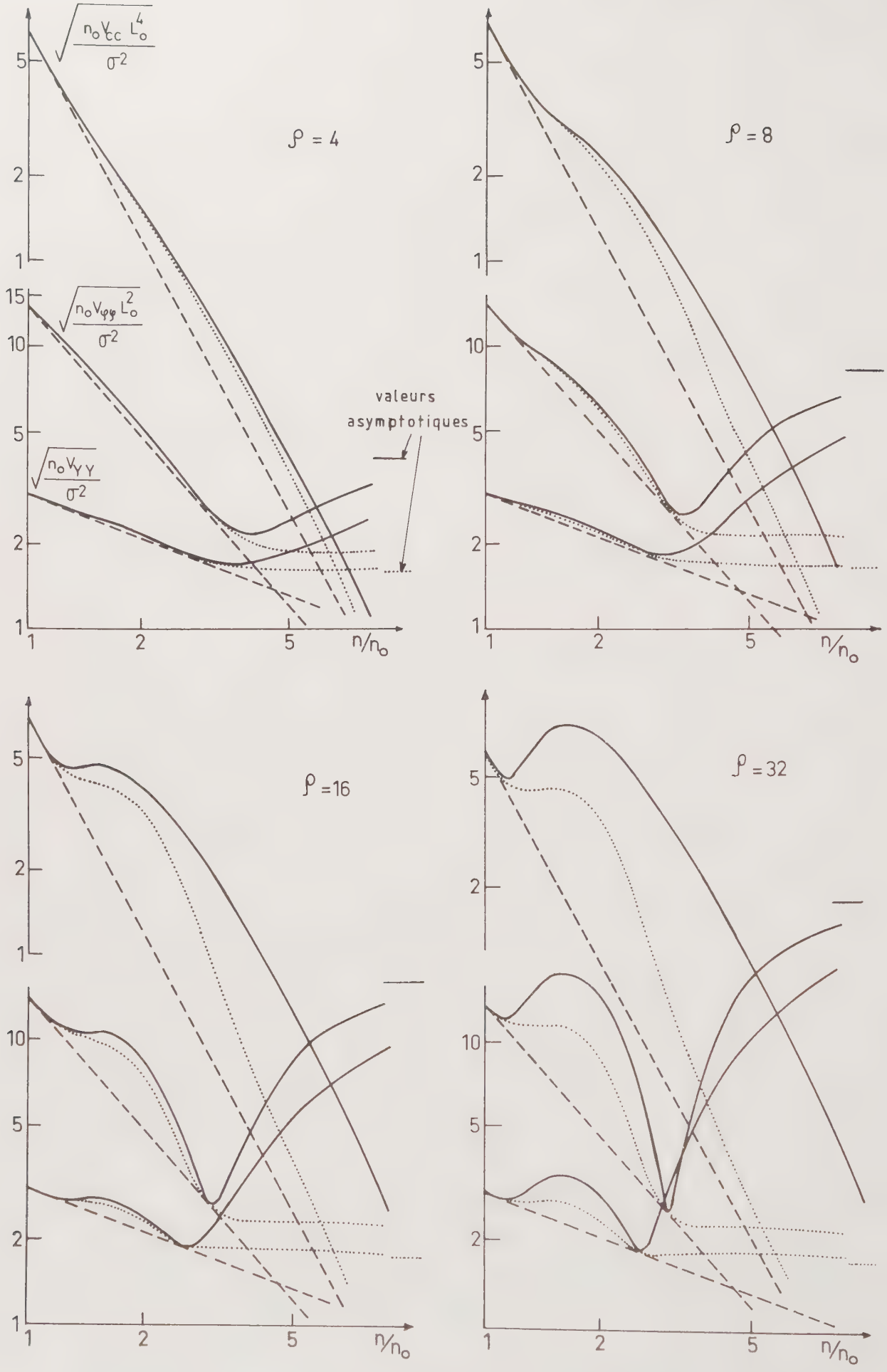

$\sqrt{\frac{n_o V_{cc} L_o^4}{\sigma^2}}$
$\sqrt{\frac{n_o V_{\varphi\varphi} L_o^2}{\sigma^2}}$
$\sqrt{\frac{n_o V_{YY}}{\sigma^2}}$
$\rho = 4$
$\rho = 8$
$\rho = 16$
$\rho = 32$
valeurs asymptotiques
n/n_o
1
2
5
10
15

FIG. A 4.2

Le calcul du $\langle \chi^2 \rangle^{dif}$ est analogue à celui de 2.2.2., on trouve :

$$\frac{\langle \chi^2 \rangle^{dif}}{n} = \frac{n_o(n-n_o)^3(4n^2-15nn_o+15n_o^2)}{12\,n^6} \frac{L_o^2 \Delta\alpha^2}{\sigma^2} \qquad (2.10)$$

$$= \frac{(n-n_o)^3(4n^2-15nn_o+15n_o^2)}{12\,n^6} \rho^2$$

En fonction de n, cette quantité passe par un maximum égal à 0,01647 pour n = 8,162 n_o, et qu'elle est au plus de l'ordre de $0.01\,\rho^2/n_o$ pour $n < 4n_o$.

Le degré de liberté supplémentaire de courbure entraîne donc que l'augmentation relative du χ^2 est plus faible que pour l'ajustement rectiligne.

Pour $\rho^2 \gg 1$ on a au premier minimum des variances :
$\langle \chi^2 \rangle^{dif}/n \simeq 1/3n_o$ (comme dans le cas rectiligne)
au deuxième minimum de V_{YY} : $\langle \chi^2 \rangle^{dif}/n \simeq \frac{9}{3125} \frac{\rho^2}{n_o}$
au deuxième minimum de $V_{\varphi\varphi}$: $\langle \chi^2 \rangle^{dif}/n \simeq \frac{4}{729} \frac{\rho^2}{n_o}$

A.4.2.3. Diffusion uniformément répartie le long de la trace.

Chaque épaisseur de matière traversée amène une diffusion aléatoire. Les angles de diffusion étant indépendants, leurs contributions aux variances et au $\langle \chi^2 \rangle$ s'additionnent simplement : on peut ainsi, à partir des résultats du paragraphe 2.1, traiter numériquement toute configuration de matière. Nous étudierons simplement ici une répartition continue et homogène de matière (comme Drijard /35/), ce qui est exact pour les chambres à bulles et assez réaliste pour beaucoup d'autres détecteurs.

Nous obtiendrons donc les quantités recherchées, pour une valeur donnée de n, par une intégration sur n_o , assimilée à une variable continue. $\delta\alpha^2$ représente maintenant la variance de l'angle de

diffusion sur une longueur ℓ, c'est à dire :

$$\delta\alpha^2 = \left(\frac{KZ}{P\beta}\right)^2 \frac{\ell}{X_0}$$

avec les notations définies dans l'introduction.

Pour le calcul des intégrales, il est utile de rappeler que

$$\int_0^1 u^i (1-u)^j \, du = \frac{i!\, j!}{(i+j+1)!}$$

A 4.2.3.1. Ajustement rectiligne.

A partir de (2.4), on calcule :

$$\begin{cases} V_{zz}^{dif} = \dfrac{\ell^2 \delta\alpha^2}{n^4} \displaystyle\int_0^n dx\, x^2 (n-x)^4 = n^3 \ell^2 \delta\alpha^2 \int_0^1 du\, u^2 (1-u)^4 \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{105}\, n^3 \ell^2 \delta\alpha^2 \\ V_{\lambda\lambda}^{dif} = \dfrac{\delta\alpha^2}{n^6} \displaystyle\int_0^n dx\, (2x+n)^2 (n-x)^4 = n\, \delta\alpha^2 \int_0^1 du\, (2u+1)(1-u)^2 \\ \qquad\qquad = \dfrac{13}{35}\, n\, \delta\alpha^2 \\ V_{z\lambda}^{dif} = -\dfrac{\ell\, \delta\alpha^2}{n^5} \displaystyle\int_0^n dx\, x(2x+n)(n-x)^4 = -n^2 \ell\, \delta\alpha^2 \int_0^1 du\, (2u+1) u (1-u)^4 \\ \qquad\qquad = -\dfrac{11}{210}\, n^2 \ell\, \delta\alpha^2 \end{cases} \tag{2.11}$$

Si ℓ est fixé, on voit que les termes de V^{dif} sont croissants en n (en n^k), alors que les termes correspondants de V^{mes} sont décroissants (en n^{k-4}) : les variances totales passent donc par un minimum. On trouve, en posant $q = \ell\, \delta\alpha / \sigma$:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Pour } V_{zz} : \quad n_{min} \simeq 3.44/\sqrt{q} \ , \ \text{et} \quad V_{zz}^{min} = \frac{4}{3}\, V_{zz}^{mes}(n_{min}) \\ &\text{Pour } V_{\lambda\lambda} : \quad n_{min} \simeq 3.14/\sqrt{q} \ , \ \text{et} \quad V_{\lambda\lambda}^{min} = 4\, V_{\lambda\lambda}^{mes}(n_{min}) \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

Avec des valeurs numériques plausibles (1,5 GeV/c, X_o = 100 m, ℓ = 5 cm, σ = 0,5 mm) on trouve $q = 0.17$ ce qui donne des longueurs optimales de 1,15 m pour Z et 1,05 m pour λ ; il est donc très possible que l'optimum soit dépassé.

La covariance $V_{z\lambda}$ passe aussi par un miminum (en valeur absolue) pour $n \simeq 3.27/\sqrt{q}$. Il en résulte que pour toute fonction de Z et on peut prévoir une longueur optimale voisine de $(3.25/\sqrt{q})\,\ell$.

La variation de $\sqrt{V_{zz}}$ et $\sqrt{V_{\lambda\lambda}}$ est illustrée sur la figure A 4.3.

Le calcul de $\langle \chi^2 \rangle^{dif}$ amène facilement :

$$\langle \chi^2 \rangle^{dif} = \frac{\ell^2 \delta\alpha^2}{3\sigma^2} \int_0^n dx\, \frac{x^3(n-x)^3}{n^3} = \frac{n^4 \ell^2 \delta\alpha^2}{420\,\sigma^2} = \frac{n^4}{420}\, q^2$$

d'où

$$\frac{\langle \chi^2 \rangle^{dif}}{n} = \frac{n^3}{420}\, q^2 \qquad (2.13)$$

On peut vérifier que l'augmentation relative du $\langle \chi^2 \rangle$ due à la diffusion est nettement plus petite que celle des variances. Pour $n \to \infty$, elle est en n^3 au lieu de n^4 pour les variances.

Notons en particulier que pour $n \simeq 3.25/\sqrt{q}$ (l'optimum) on a $\langle \chi^2 \rangle^{dif} = \frac{n^4}{420}\, q^2 \simeq 0.266$, alors que $\langle \chi^2 \rangle^{mes} \simeq n$: la valeur des résidus reste pratiquement la même qu'en l'absence de diffusion.

Du point de vue des chambres à bulles, le nombre et la répartition des points de mesure est arbitraire (dans certaines limites). Supposons d'abord, comme précédememnt, que les points sont équidistants : les termes de V^{dif} *ne dépendent que de la longueur totale mesurée, et ceux de* V^{mes} *décroissent quant n croît. On aura donc intérêt à prendre le plus grand nombre possible de points, soit* n_{max} *. Quelle est, dans ces conditions, la longueur optimale ?*

- *Pour Z elle est évidemment nulle*
- *Pour* λ : $V_{\lambda\lambda} = \frac{12\sigma^2}{nL^2} + \frac{13}{35} kL$ *avec* $k = \left(\frac{KZ}{P\beta}\right)^2 \frac{1}{X_0}$

d'où $L^3_{opt} = \frac{840}{13} \frac{\sigma^2}{k n_{max}}$ *et* $L_{opt} = 4.013 \left(\frac{\sigma^2}{k n_{max}}\right)^{1/3}$

pour cette longueur :

$$V^{opt}_{\lambda\lambda} = 2.236 \left(\frac{k^2\sigma^2}{n_{max}}\right)^{1/3}$$

En supposant les points concentrés à l'origine, et à la distance L (en nombre égal pour minimiser la contribution en σ^2 *) on trouve une longueur optimale plus courte et une variance optimale plus faible :*

$$V_{\lambda\lambda} = \frac{4\sigma^2}{nL^2} + \frac{kL}{3}, \quad d'où \quad L'_{opt} = 2.884 \left(\frac{\sigma^2}{k n_{max}}\right)^{1/3}$$

et

$$V'^{opt}_{\lambda\lambda} = 1.442 \left(\frac{k^2\sigma^2}{n_{max}}\right)^{1/3}$$

Dans la pratique, les traces sont presque toujours courbées et le problème se pose alors autrement.

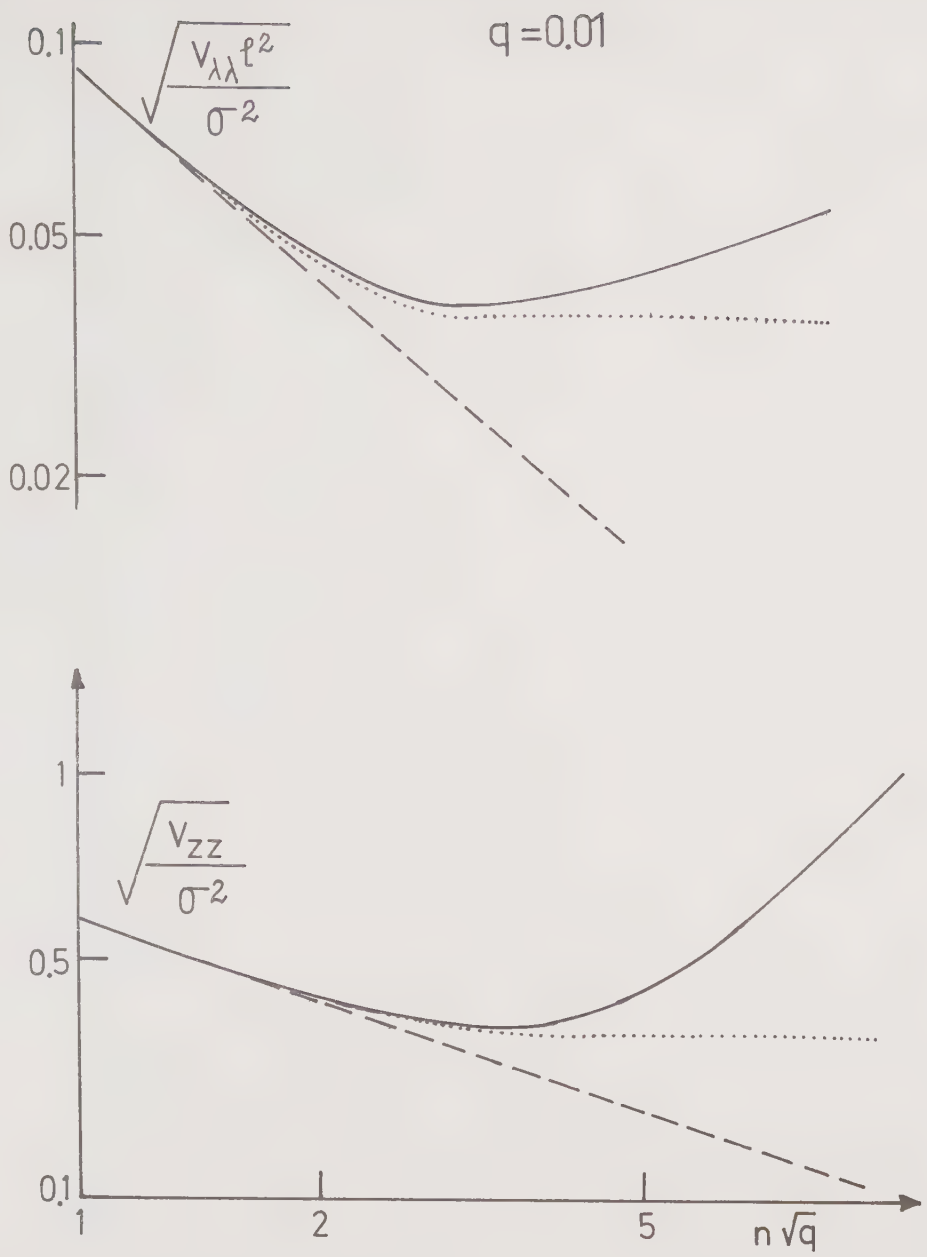


FIG. A 4.3

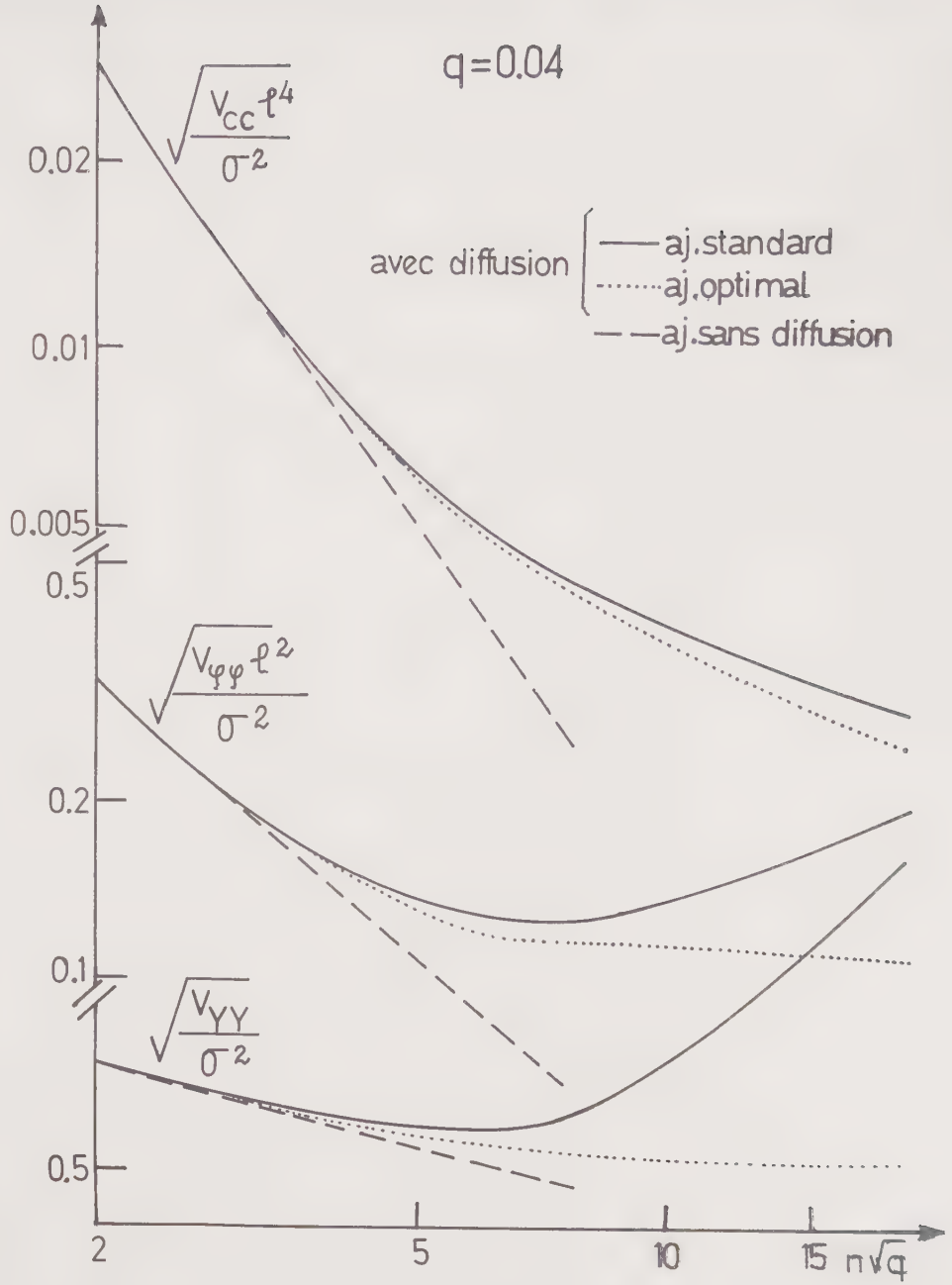


FIG. A 4.4

A 4.2.3.2. Ajustement parabolique.

A partir de (2.9) on obtient, pour les paramètres $Y, \varphi, \frac{c}{2}$:

$$V^{dif} = \delta\alpha^2 \begin{bmatrix} \frac{n^3\ell^2}{630} & -\frac{n^2\ell}{60} & \frac{n}{168} \\ \cdots & \frac{8n}{35} & -\frac{3}{28\ell} \\ \cdots & \cdots & \frac{5}{14n\ell^2} \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

Ici encore la dépendance en n à ℓ fixé est en n^k alors que celle du terme correspondant de V^{mes} est en n^{k-4} .

Les variances $V_{YY}, V_{\varphi\varphi}$ ainsi que $V_{Y\varphi}$, ont un comportement tout à fait analogue à celui de $V_{ZZ}, V_{\lambda\lambda}$ et $V_{Z\lambda}$ dans l'ajustement rectiligne : les longueurs optimales sont ici respectivement $6.59/\sqrt{q}$, $7.09/\sqrt{q}$ et $6.82/\sqrt{q}$, c'est à dire environ le double de ce qu'elles étaient pour Z et λ . Remarquons toutefois que dans beaucoup de détecteurs la précision de mesure est plus grande dans le plan de courbure (perpendiculaire au champ magnétique) que dans le plan parallèle au champ : ceci tend à faire que les longueurs optimales soient du même ordre de grandeur pour Y, Z, λ et φ .

Une différence importante apparaît pour le paramètre c , car V_{cc}^{dif} est décroissant en fonction de n ; il n'y a donc pas de longueur optimale pour la courbure (elle est infinie). Dans tous les cas où l'incertitude sur la courbure est prépondérante pour l'analyse cinématique il convient donc de mesurer la trace sur la plus grande longueur possible. Dans d'autres configurations (traces à grand $|\lambda|$, mesure d'événements élastiques, de V^o , etc...) la précision sur les angles est importante pour le bilan d'impulsion-énergie et il peut être préférable de tronquer certaines traces pour améliorer la résolution cinématique. Il en est de même pour les questions géométriques liées à la position (passage ou non d'une trace par un vertex, distinction d'un vertex secondaire).

Une solution satisfaisante serait de réaliser plusieurs ajustements pour une même trace, pour optimiser séparément les différents paramètres : le temps de calcul en serait allongé, d'autant plus qu'il faudrait calculer à part les termes de covariance qui ne pourraient plus être extraits directement d'une matrice déjà calculée.

Pour le $\langle \chi^2 \rangle^{dif}$ on trouve un résultat analogue à celui de l'ajustement rectiligne

$$\langle \chi^2 \rangle^{dif} = \frac{\ell^3 \delta\alpha^2}{n^5 \sigma^2} \int_0^n dx \; \frac{x^3 (n-x)^3 (4n^2 - 15nx + 15x^2)}{12} \qquad (2.17)$$

$$= \frac{n^4 q^2}{2520}$$

$$\text{D'où} \quad \frac{\langle \chi^2 \rangle^{dif}}{n} = \frac{n^3 q^2}{2520} \qquad (2.18)$$

Le coefficient numérique est nettement plus petit, à cause du degré de liberté supplémentaire.

Pour $n = 6.85/\sqrt{q}$ (moyenne des optima pour Y et φ) on trouve

$$\langle \chi^2 \rangle^{dif} = 0.874$$

Le point de vue "chambre à bulles" défini plus haut (2.3.1.) amène une discussion plus complexe. Avec des points de mesure équidistants, en nombre $n \leq n_{max}$ *, la longueur optimale est :*

- *nulle pour Y*
- *infinie pour c*
- *égale à* $11.888 \left(\frac{\sigma^2}{k\, n_{max}} \right)^{1/3}$ *pour* φ

Si les points de mesure sont regroupés en trois paquets (à l'origine, à la distance L, et en une position intermédiaire), on trouve

que l'optimum pour L est la plus grande valeur possible (longueur totale mesurable) et que la position intermédiaire doit être située :

- pour optimiser la courbure, au milieu (L/2) avec la moitié des points, l'autre moitié étant répartie également entre les deux extrémités.

- Pour optimiser l'angle φ *, à une distance* γL *telle que* $\gamma^3(1-\gamma)^3 = \frac{24\,\sigma^2}{n_{max}\,k\,L^3}(1-2\gamma)$ *avec la moitié des points, l'autre moitié étant répartie proportionnellement à* $1-\gamma^2$ *(pour l'origine) et* γ^2 *(pour l'extrémité).*

Posons $\mathcal{L}^3 = \frac{24\,\sigma^2}{k\,n_{max}}$ *; alors si* $\mathcal{L} \gg L$ *on arrive à la même conclusion que pour la courbure.*

Si au contraire $\mathcal{L} \ll L$ *, l'optimum consiste à concentrer presque les points, pour moitié à l'origine et pour moitié à la distance* $\mathcal{L}$*, et le reste à l'extrémité.*

A 4.2.4. Applications numériques à l'expérience WA 13.

A 4.2.4.1. Schématisation du détecteur et des traces.

L'ensemble des modules optiques peut être assimilé à une succession de 60 chambres à étincelles verticales, équidistantes (avec un intervalle ℓ = 3,5 cm), chacune donnant une mesure des coordonnées y et z indépendamment, avec des précisions respectives σ_y et σ_z qui valent, d'après 1.2.3. :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{0.0036 + 0.029\,\theta_i^4} \quad \text{cm} \\ \sigma_z &= 0.21 \quad \text{cm} \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

(θ_i est l'angle d'incidence de la particule).

Après n_o points de mesure ($n_o = 20$) on trouve le scintillateur S6 d'épaisseur 1 cm, ce qui représente 0,023 longueur de radiation. Pour un angle d'incidence θ_i , cette quantité doit être divisée par cos θ_i . L'écart-type de l'angle de diffusion projeté sur un plan passant par la trace sera donc donné par :

$$\Delta\alpha = \frac{0.015}{p\beta}\sqrt{\frac{0.023}{\cos\theta_i}} \qquad \text{(impulsion p en GeV/c)}$$

La matière répartie (électrodes et gaz) équivaut, pour chaque intervalle ℓ, à $6{,}8.10^{-4}$ longueur de radiation, ce qui donne pour l'angle de diffusion élémentaire :

$$\delta\alpha = \frac{0.015}{p\beta}\sqrt{\frac{6.8\times10^{-4}}{\cos\theta_i}}$$

Les traces étant peu courbées, on peut supposer que θ_i garde la même valeur d'un bout à l'autre de la portion mesurée, peu différente de l'angle d'émission au vertex par rapport à la direction du faisceau.

De la sorte, on se ramène aux conditions posées en A 4.2.1., à ceci près que les angles λ et φ ne sont pas, en général, petits, et que le calcul des matrices de covariance effectué en A 4.2.2. et A 4.2.3. s'applique maintenant aux pentes des projections horizontale et verticale (c'est à dire $a = \mathrm{tg}\,\varphi$ et $b = \mathrm{tg}\,\lambda/\cos\varphi$), et non pas directement à φ et λ . De même le paramètre c ne sera plus la courbure, mais celle-ci divisée par $\cos^3\varphi$ (Par raison de commodité, nous continuerons à utiliser l'indice c pour la variance correspondante).

Les écarts-type $\Delta\alpha$ et $\delta\alpha$ se traduiront pour les pentes a et b par des écarts-type :

$$\Delta a = \sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a^2)}\quad \Delta\alpha$$

$$\Delta b = \sqrt{(1+a^2+b^2)(1+b^2)}\quad \Delta\alpha$$

et des formules analogues pour δa et δb en fonction de $\delta \alpha$.

(La justification de ces formules sera donnée en A 4.3.3.1.).

Il apparaît également une corrélation entre les écarts sur a et b, que nous négligerons.

A 4.2.4. 2. Contribution de la diffusion aux variances.

On peut écrire la matrice de covariance des paramètres sous la forme :

$$V^{tot} = V^{mes} + V_1^{dif} + V_2^{dif}$$

V^{mes} : contribution des erreurs de mesure, donnée par (2.2) et (2.8)
V_1^{dif} : " du scintillateur, donnée par (2.4) et (2.9)
V_2^{dif} : " de la matière répartie donnée par (2.11) et (2.16)

Nous évaluerons numériquement les accroissements relatifs des variances, dus à la diffusion multiple, c'est à dire, pour chacun des 5 paramètres (notés p_i), la quantité :

$$A_{p_i} = \frac{\left(V_1^{dif} + V_2^{dif}\right)_{p_i p_i}}{\left(V^{mes}\right)_{p_i p_i}} = (A_1)_{p_i} + (A_2)_{p_i}$$

On peut écrire, d'après (2.2) et (2.4), en posant $\eta = n/n_0$ (n = nombre total de points mesurés) :

$$(A_1)_z = \frac{(\eta-1)^4}{4\eta^3}\rho_z^2 \quad ; \quad (A_1)_b = \frac{(\eta+2)^2(\eta-1)^4}{12\eta^3}\rho_z^2$$

et, d'après (2.8) et (2.9) :

$$(A_1)_Y = \frac{(\eta-5/2)^2(\eta-1)^4}{9\eta^5}\rho_Y^2 \quad ; \quad (A_1)_a = \frac{(\eta-3)^2(\eta+5)^2(\eta-1)^4}{192\eta^5}\rho_Y^2$$

$$(A_1)_c = \frac{5(\eta-1)^4}{4\eta^5}\rho_Y^2$$

(Le coefficient ϱ a été défini par (2.5) ; il prend des valeurs différentes ϱ_Y et ϱ_Z dans les deux directions).

D'autre part, en posant $\varepsilon = q^2 \eta^4$ (avec $q = \frac{p \delta_\alpha}{\sigma}$) on a d'après (2.2) et (2.11) :

$$(A_2)_Z = \frac{\varepsilon_Z}{420} \quad ; \quad (A_2)_b = \frac{13\ \varepsilon_Z}{420}$$

et, d'après (2.8) et (2.16) :

$$(A_2)_Y = \frac{\varepsilon_Y}{5670} \quad ; \quad (A_2)_a = \frac{\varepsilon_Y}{840} \quad ; \quad (A_2)_c = \frac{\varepsilon_Y}{504}$$

Une remarque sur les ordres de grandeur de A : ils peuvent être différents pour les différents paramètres au premier point mesuré. Cependant, les matrices de covariance devront être ensuite extrapolées vers le vertex, sur une distance pouvant aller en gros de 30 à 80 cm, (non négligeable par rapport à la longueur mesurée, voire supérieure). Comme on peut aisément s'en convaincre, ceci amène une uniformisation des accroissements, et c'est le paramètre qui a le plus grand A qui tend à le transmettre aux autres.

On peut calculer de la même façon les accroissements relatifs du $\langle \chi^2 \rangle$, dus à la diffusion :

- Dans le plan vertical :

$$(A_1)_{\langle \chi_Z^2 \rangle} = \frac{(\eta-1)^3}{3\eta^4} \frac{\varrho_Z^2}{n_o} \quad ; \quad (A_2)_{\langle \chi_Z^2 \rangle} = \frac{\varepsilon_Z}{420\, n}$$

- Dans le plan horizontal :

$$(A_1)_{\langle \chi_Y^2 \rangle} = \frac{(\eta-1)^3(4\eta^2-15\eta+15)}{12\,\eta^6} \frac{\varrho_Y^2}{n_o}$$

$$(A_2)_{\langle \chi_Y^2 \rangle} = \frac{\varepsilon_Y}{2520\, n}$$

A 4.2.4.3. Valeurs numériques pour différentes configurations de traces.

Nous donnons dans le tableau A 4.2 les résultats pour des exemples rencontrés dans WA 13, avec des impulsions de faisceau de 3, 8 et 12 GeV/c. (L'angle azimutal est l'angle que fait avec l'axe y la trace projetée sur le plan yz).

On voit sur ce tableau que l'accroissement de variance peut parfois dépasser 100%. En moyenne, c'est sur l'angle λ et sur la courbure qu'il est le plus grand : cet accroissement se transmettra alors à tous les termes de la matrice extrapolée au vertex, et dans certains cas celle-ci sera multipliée par 2 par le fait de la diffusion.

On voit aussi que cet accroissement est d'autant plus faible que la trace est plus rapide, mais la configuration géométrique joue un rôle très important (en particulier le nombre de points mesurés après le S6). Il n'est donc pas évident que sur l'ensemble des événements, l'accroissement diminue fortement quand l'impulsion du faisceau augmente. Seule une analyse détaillée (événement par événement) pourrait évaluer correctement l'accroissement moyen et voir s'il explique à lui seul le facteur multiplicatif imposé aux matrices de covariance pour rendre plates les distributions en probabilité de l'ajustement de vertex (cf 3.3.2.).

L'accroissement du χ^2 est, comme prévu très faible, et, dans tous les cas, très inférieur à celui des variances. Il s'ensuit que les matrices de covariance seraient pratiquement inchangées après renormalisation des résidus (cf. 3.3.1.).

TABLEAU A 4.2.

ACCROISSEMENTS DES VARIANCES DUS À LA DIFFUSION MULTIPLE

Impulsion faisceau		3 GeV/c		8 GeV/c		12 GeV/c	
Direction de la particule dans le réf. du c.m.		arrière	avant	arrière	avant	arrière	avant
données	particule	p(ou $\bar{p}$)	π	p(ou $\bar{p}$)	indifférent	p (ou $\bar{p}$)	indiff.
	impulsion	1,4	2,2	2,6	6,2	3,6	9,1
	θ_c	0,8	0,4	0,7	0,28	0,6	0,22
	azimuth	45°	0	0	90°	90°	0
	n	20	30	25	40	40	60
coefficients intermédiaires	σ_y	0,124	0,066	0,103	0,062	0,086	0,061
	$\Delta\alpha$ ($\times 10^3$)	2,3	1,1	1,1	0,38	0,72	0,25
	ρ_y	10,5	6,05	5,54	2,01	3,18	1,38
	ρ_z	5,8	1,75	2,07	0,61	1,57	0,39
	$\delta\alpha$ ($\times 10^3$)	0,40	0,19	0,18	0,065	0,12	0,044
	q_y	0,020	0,012	0,011	0,0039	0,0061	0,0027
	q_z	0,011	0,0034	0,0040	0,0012	0,0030	0,0007
accroissement des variances	y : A_1	0	0,033	0,007	0,003	0,009	0,003
	y : A_2	0,011	0,020	0,008	0,007	0,017	0,017
	y : $A_1 + A_2$	0,011	0,053	0,015	0,010	0,026	0,020
	a : A_1	0	0,149	0,024	0,032	0,080	0
	a : A_2	0,077	0,130	0,053	0,045	0,114	0,109
	a : $A_1 + A_2$	0,077	0,279	0,077	0,077	0,194	0,109
	c : A_1	0	0,376	0,049	0,157	0,395	0,157
	c : A_2	0,129	0,217	0,088	0,076	0,190	0,181
	c : $A_1 + A_2$	0,129	0,593	0,137	0,233	0,585	0,338
	z : A_1	0	0,014	0,002	0,012	0,077	0,023
	z : A_2	0,054	0,022	0,015	0,008	0,056	0,017
	z : $A_1 + A_2$	0,054	0,036	0,017	0,020	0,133	0,040
	b : A_1	0	0,058	0,008	0,062	0,412	0,186
	b : A_2	0,704	0,283	0,192	0,109	0,725	0,224
	b : $A_1 + A_2$	0,704	0,341	0,200	0,171	1,137	0,410
Accroissement du χ^2 ($\times 10^3$)	Vertical	2,3	2,0	1,1	0,6	3,9	0,5
	Horizontal	1,3	4,1	2,1	0,7	1,6	1,1

Unités : GeV/c, cm , rad

A 4.3. AJUSTEMENT OPTIMAL : LA METHODE RECURRENTE.

A 4.3.1. Propriétés générales de l'information /36/

A 4.3.1.1. Définitions.

Nous utilisons dans ce qui suit l'information au sens de R.A. Fischer : considérons des variables aléatoires $y_i \; (i = 1 \text{ à } n)$ dont la densité de probabilité $F(y_i ; p_j)$ dépend des paramètres $p_j \; (j = 1 \text{ à } q)$. L'information contenue dans $Y = \{y_i\}$ à propos des θ_j est définie par uen matrice $(q \times q)$:

$$\left[I_Y(p) \right]_{jj'} = \int f(Y;p)\, dY \; \frac{\partial}{\partial p_j} \operatorname{Log} f(Y;p) \; \frac{\partial}{\partial p_{j'}} \operatorname{Log} F(Y;p)$$

Si les T_k sont des "statistiques" c'est à dire des fonctions des y_i , leur densité de probabilité $g(T;p)$ se déduit de f, et l'information contenue dans les T_k à propos des p_j se définit par :

$$\left[I_T(p) \right]_{jj'} = \int g(T;p)\, dT \; \frac{\partial}{\partial p_j} \operatorname{Log} g \; \frac{\partial}{\partial p_{j'}} \operatorname{Log} g$$

Introduisons une relation d'ordre sur les matrices définies positives en posant $A \leq B$ si $x^t A x \leq x^t B x$ pour tout vecteur x. On a alors $I_T(p) \leq I_Y(p)$. Un ensemble de statistiques T est dit <u>exhaustif</u> si la densité de probabilité conditionnelle $F(Y \mid T)$ est indépendante des p_j : ceci correspond à l'idée intuitive que les T_k contiennent toute l'information des Y_i à propos des p_j . De fait, T exhaustif équivaut à $I_T(p) = I_Y(p)$.

Dans notre problème les paramètres sont la position et les angles d'une trace au premier point mesuré, et sa courbure ; les y_i sont les mesures, dont les écarts par rapport aux vraies valeurs sont supposées indépendants entre eux, et les T_k sont, par exemple, des estimateurs des paramètres tels ceux utilisés dans l'ajustement standard décrit dans le paragraphe précédent. Les propriétés de l'information serviront à construire des estimateurs ayant une variance minimale. Nous supposerons

toujours que les estimateurs sont sans biais (c'est à dire que leur valeur moyenne est égale à la vraie valeur des paramètres), ce qui est vrai ici dans la mesure où on peut considérer les variations des y_i comme linéaires par rapport à celles des p_j, et que les erreurs de mesure n'introduisent aucune dissymétrie.

Les propriétés que nous allons énoncer sont conformes à l'idée intuitive d'information, qu'elles précisent mathématiquement. Nous admettrons que f remplit les conditions de régularité nécessaires à leur validité.

A 4.3.1.2. Inégalité de Cramer-Rao ; estimateur efficace.

Si les T_k sont des estimateurs sans biais des p_j et $V(T)$ leur matrice de covariance, on a :

$$V(T) \geqslant I_T^{-1} \geqslant I_Y^{-1}$$

et en particulier $[V(T)]_{jj} \geqslant [I_T^{-1}]_{jj} \geqslant [I_Y^{-1}]_{jj}$ pour tout j.

La première inégalité devient une égalité pour certaines formes de la densité de probabilité, en particulier si elle est gaussienne : on peut raisonnablement le supposer ici (même si la distribution de chaque y_i n'est pas gaussienne, une fonction combinant linéairement un grand nombre de mesures indépendantes tend à le devenir) : la matrice de covariance d'un estimateur est donc l'inverse de la matrice d'information contenue dans cet estimateur.

Si la deuxième inégalité est elle aussi saturée, l'estimateur est dit efficace : il contient l'information maximale, et les variances V_{jj} sont les plus petites qu'on puisse obtenir à partir des y_i (il en est de même pour la variance de toute combinaison des paramètres).

Dire que les T_k sont efficaces équivaut à dire qu'ils forment un ensemble de statistiques exhaustif par rapport aux P_j.

Si les U_ℓ sont fonctions biunivoques des T_k, ils forment aussi des statistiques exhaustives.

A 4.3.1.3.Variables indépendantes et additivité de l'information.

On peut montrer, sous certaines conditions de régularité que l'information peut s'écrire sous une forme équivalente :

$$\left[I_Y(p)\right]_{jj'} = -\int dY\, f(Y;p)\, \frac{\partial^2 \mathrm{Log}\, f(Y;p)}{\partial p_j\, \partial p_{j'}}$$

Si les variables Y peuvent être séparées en deux groupes Y_1 et Y_2 indépendants, alors $f(Y;p) = F_1(Y_1;p)\, F_2(Y_2;p)$ et l'information se décompose en deux termes :

$$\left[I_Y(p)\right]_{jj'} = -\int F_1(Y_1;p)\, dY_1\, \frac{\partial^2 \mathrm{Log}\, F_1}{\partial p_j\, \partial p_{j'}} \int F_2(Y_2;p)\, dY_2 - \int F_1(Y_1;p)\, dY_1 \int F_2(Y_2;p)\, dY_2\, \frac{\partial^2 \mathrm{Log}\, F_2}{\partial p_j\, \partial p_{j'}}$$

Les fonctions f_1 et f_2 étant normalisées par définition, il reste simplement :

$$\left[I_Y(p)\right]_{jj'} = \left[I_{Y_1}(p)\right]_{jj'} + \left[I_{Y_2}(p)\right]_{jj'}$$

Ce qui exprime l'additivité de l'information.

Cette propriété est utilisée habituellement avec des Y_1 et Y_2 qui suivent la même loi, et généralisée à n groupes de variables (mesure de n événements d'un même lot par exemple). Dans notre cas, les

points mesurés successivement sur une même trace ne dépendent pas de la même façon des paramètres initiaux ; l'information qu'ils apportent sur ces paramètres est donc différente.

La diffusion multiple rend ces points corrélés les uns aux autres, ce qui interdit d'appliquer la propriété d'additivité telle quelle : nous verrons par quel biais la méthode récurrente permet d'éluder cette difficulté (cf A 4.3.2.4.).

A 4.3.1.4. Cas particulier des variables gaussiennes linéarisées.

Nous supposons maintenant que la fonction f est linéaire au voisinage des vraies valeurs des paramètres, et qu'on peut écrire, pour les écarts par rapport à ces vraies valeurs : $\delta Y = A\,\delta p$
A étant une matrice (n x q).

Si les δY suivent une loi gaussienne avec une matrice de covariance Σ, on peut écrire :

$$f(\delta Y) = \exp\left[-\tfrac{1}{2}(\delta Y - A\,\delta p)^t \Sigma^{-1}(\delta Y - A\,\delta p)\right]$$

ce qui donne pour l'information :

$$\left[I_Y(p)\right]_{jj'} = \tfrac{1}{2}\int f(Y)\,dY \frac{\partial^2}{\partial p_j \partial p_{j'}}\left[(\delta Y - A\,\delta p)^t \Sigma^{-1}(\delta Y - A\,\delta p)\right]$$

$$= \int f(Y)\,dY \left[A^t \Sigma^{-1} A\right]_{jj'} = \left[A^t \Sigma^{-1} A\right]_{jj'}$$

Cette formule restera approximativement valable si les y_i ne sont pas fonctions linéaires des p_j, mais que leurs variances sont assez petites pour qu'on puisse linéariser leur dépendance autour des vraies valeurs dans un domaine de quelques écarts-type dans toutes les directions. Dans ce cas la matrice A sera la matrice des dérivées locales.

A 4.3.1.5. Théorème de Gauss-Markov.

Soient $Y=\{y_i\}$ un ensemble de mesures et Σ leur matrice de covariance. Si la dépendance des moyennes $E(y_i)$ par rapport aux p_j est linéaire : $E(Y) = A\,p$, alors l'estimateur linéaire de précision maximale (c'est à dire de variance minimale) est donné par :

$$\hat{p} = \left(A^t \Sigma^{-1} A\right)^{-1} A^t \Sigma^{-1} Y \text{ , avec } V(\hat{p}) = \left(A^t \Sigma^{-1} A\right)^{-1}$$

S'il existe un estimateur linéaire efficace, c'est donc celui-là. Dans le cas gaussien, nous avons vu que $I_Y = A^t \Sigma^{-1} A$ L'inégalité de Cramer-Rao est saturée, donc l'estimateur de Gauss-Markov est efficace. C'est celui qui minimise $\chi^2 = (Y-Ap)^t \Sigma^{-1} (Y-Ap)$ (cf. annexe 2).

Si la dépendance n'est pas linéaire mais linéarisable autour de valeurs approchées des paramètres, la même formule peut être appliquée aux écarts, et avec une éventuelle itération on arrive à un estimateur efficace.

Dans le cas de la mesure d'une trace, la diffusion multiple introduit des corrélations entre les y_i , et l'application du théorème pour construire un estimateur exige donc le calcul et l'inversion d'une matrice (n x n), ce qui la rend fort lourde par rapport à la méthode classique qui ne tient compte que des erreurs de mesure, et dans laquelle Σ est diagonale.

A 4.3.2. La méthode récurrente d'ajustement.

A 4.3.2.1. Principe général.

Supposons une trace mesurée aux points d'abscisses $x_1, x_2, \cdots x_N$ Connaissant le meilleur estimateur de paramètres d'une trace au point à partir des points $x_n, x_{n+1}, \cdots x_N$, nous cherchons à définir le meilleur estimateur des paramètres au point x_{n-1} , à partir des points $x_{n-1}, x_n, \cdots, x_N$. Il s'agit ici des paramètres réels, donc incluant l'effet des diffusions antérieures.

Ce passage comporte :

- Une diffusion entre x_{n-1} et x_n , donc une perte d'information par rapport à l'extrapolation pure et simple des paramètres et de leur matrice de covariance.

- Une information supplémentaire par la mesure au point x_{n-1}

Nous supposerons que la distance entre x_{n-1} et x_n est assez petite pour que la diffusion affecte uniquement les angles et pas la position ; ou, ce qui revient au même, que la matière est concentrée aux points x_i , et que la trace est assimilable à une courbe brisée. Si la distance est trop grande, on peut toujours introduire des points intermédiaires sur lesquels on n'a pas effectué de mesure. Cette restriction n'est pas essentielle à la méthode, elle simplifie les calculs.

Nous allons décrire cet estimateur récurrent en nous plaçant d'abord dans le cas de la projection plane, et en assimilant chaque petit arc de courbe à un arc de parabole (avec les mêmes notations que dans le paragraphe 2).

Nous supposons implicitement connue une première approximation de l'impulsion pour évaluer la diffusion. Cette approximation pourra être obtenue, ou précisée, par un pré-ajustement sur une portion de la trace. Pour des impulsions faibles, si la particule n'est pas identifiée par ailleurs, il y aura lieu de distinguer différentes hypothèses de masse.

A 4.3.2.2. Prise en compte de la diffusion.

Soient y_n^v , φ_n^v et c_n^v les vraies valeurs des paramètres au point x_n , après la diffusion ; les vraies valeurs en ce même point avant la diffusion seront y_n^v , $\varphi_n^v + \alpha_n$ et c_n^v , où α_n est une variable quasi-gaussienne de variance $\delta\alpha_n^2$. Soient y_n^{opt} , φ_n^{opt} et c_n^{opt}

les meilleurs estimateurs de y_n^v, φ_n^v et c_n^v à partir des mesures y_n^m, y_{n+1}^m, ... y_N^m, et V_n leur matrice de covariance. Il est clair que ces estimateurs, en tant que variables aléatoires, sont indépendants de α_n. Il en résulte qu'ils sont aussi les meilleurs estimateurs de y_n^v, $\varphi_n^v + \alpha_n$ et c_n^v avec pour matrice de covariance la matrice V_n^* définie par :

$$V_n^* = V_n + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\alpha_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si φ_n^{opt} est efficace pour φ_n^v, il l'est aussi pour $\varphi_n^v + \alpha_n$

A 4.3.2.3. Propagation au point précédent.

La transformation qui fait passer des paramètres en x_n (avant diffusion) à ceux en x_{n-1} (après diffusion) est sans perte d'information. En posant $\delta x_n = x_n - x_{n-1}$, y'_{n-1}, φ'_{n-1} et c'_{n-1}, définis par

$$\begin{bmatrix} y'_{n-1} \\ \varphi'_{n-1} \\ c'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta x_n & \frac{\delta x_n^2}{2} \\ 0 & 1 & -\delta x_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n^{opt} \\ \varphi_n^{opt} \\ c_n^{opt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ D_n \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n^{opt} \\ \varphi_n^{opt} \\ c_n^{opt} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

sont donc les meilleurs estimateurs de y, φ, c en x_{n-1} à partir de y_n^m, y_{n+1}^m, ... y_N^m. Leur matrice de covariance est

$$V'_{n-1} = D_n V_n^* D_n^t = D_n \left(V_n + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\alpha_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) D_n^t \quad (3.2)$$

A 4.3.2.4. Prise en compte de la mesure précédente.

Il faut maintenant ajouter l'information apportée par y^m_{n-1} Notons que cette information porte aussi sur α_n (qui n'a pas d'utilité, sauf peut-être pour l'identification de la particule à basse impulsion). La vraisemblance de l'ensemble des mesures $y^m_n \cdots y^m_N$ en fonction de y, φ, c (paramètres à ajuster) est donnée à un facteur près par $\exp\left[-\frac{1}{2}\,\Delta p^t \left(V'_{n-1}\right)^{-1} \Delta p\right]$, Δp ayant pour composantes $y - y'_{n-1}$

$\varphi - \varphi'_{n-1}$ et $c - c'_{n-1}$; la vraisemblance de y^m_{n-1} est simplement

$$\exp\left[-\frac{(y - y^m_{n-1})^2}{2\sigma^2}\right]$$

Les erreurs de mesure étant indépendantes, les vraisemblances se factorisent (c'est un cas particulier d'additivité de l'information ; cf 3.1.3.). Maximiser la vraisemblance totale revient à minimiser la forme quadratique :

$$\Delta p^t \left(V'_{n-1}\right)^{-1} \Delta p + \frac{(y - y^m_{n-1})^2}{2\sigma^2} \qquad (3.3)$$

par rapport à y, φ, c ;

On obtient donc y^{opt}_{n-1}, φ^{opt}_{n-1} et C^{opt}_{n-1} par résolution de

$$\left(\left(V'_{n-1}\right)^{-1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} y - y'_{n-1} \\ \varphi - \varphi'_{n-1} \\ c - c'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y^m_{n-1} - y'_{n-1}}{\sigma^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.4)$$

et leur matrice de covariance s'écrit :

$$V_{n-1} = \left(V'^{-1}_{n-1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \qquad (3.5)$$

Les équations (3.2) et (3.4) peuvent s'écrire en faisant apparaître les inverses des matrices de covariance, c'est à dire les matrices d'information ; (3.2) devient :

$$I'_{n-1} = \left(D_n^{-1}\right)^t \left(I_n^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\alpha_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} D_n^{-1}$$

avec

$$D_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \delta x_n & \frac{\delta x_n^2}{2} \\ 0 & 1 & \delta x_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs

$$I_n^* = \left(I_n^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\alpha_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = I_n - \frac{\delta\alpha_n^2}{1+\delta\alpha_n^2 I_{n\varphi\varphi}} I_n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I_n$$

$$= I_n - \frac{\delta\alpha_n^2}{1+\delta\alpha_n^2 I_{n\varphi\varphi}} \begin{bmatrix} I_{n\gamma\varphi}^2 & I_{n\varphi\varphi} I_{n\gamma\varphi} & I_{n\gamma\varphi} I_{n\varphi c} \\ \cdots & I_{n\varphi\varphi}^2 & I_{n\varphi\varphi} I_{n\varphi c} \\ \cdots & \cdots & I_{n\varphi c}^2 \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

(Le deuxième terme de cette expression représente donc la perte d'information due à la diffusion)

$$\left(\underbrace{\left(D_n^{-1}\right)^t \; I_n^* \; D_n^{-1}}_{I'_{n-1}} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \gamma - \gamma'_{n-1} \\ \varphi - \varphi'_{n-1} \\ c - c'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_{n-1}^m - \gamma'_{n-1}}{\sigma^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

et (3.5) devient :

$$I_{n-1} = I'_{n-1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

Cette forme, qui englobe les trois temps d'une étape de la récurrence, ne fait apparaître que des opérations matricielles simples (en particulier, il n'y a pas d'inversion explicite).

Le tableau A 4.3. résume l'algorithme de récurrence.

A 4.3.2.5. Amorçage de la récurrence.

Il peut se faire de deux façons pratiquement équivalentes :

- Utiliser les trois derniers points pour calculer les valeurs de y, φ, c au point x_{N-2}, faisant intervenir au besoin la matrice de covariance totale (incluant la contribution de la diffusion en x_{N-1} et x_{N-2}).

- Commencer la récurrence au dernier point ; celui-ci définit y_N avec une variance σ^2, mais laisse complètement indéterminés φ et c ; il suffit de leur affecter une valeur initiale approchée et une variance arbitraire très grande (mais non infinie) pour pouvoir inverser la matrice de covariance. Si on utilise la forme (3.7) cela revient à choisir une matrice d'information initiale égale à $\begin{bmatrix} 1/\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ avec ε_1 et ε_2 très petits (on peut d'ailleurs faire $\varepsilon_1 = 0$) ; à partir de là le mécanisme de récurrence peut être appliqué sans risque de singularité : l'information apportée par y_{N-1} et y_{N-2} ajuste φ et c et les valeurs obtenues à partir de x_{N-2} sont pratiquement indépendantes des valeurs de départ des paramètres (si celles-ci sont assez proches de vraies valeurs pour que la linéarisation soit valide).

TABLEAU A4.3 — SCHÉMA D'UNE ÉTAPE DE L'AJUSTEMENT RÉCURRENT

	Estimateur	Matrice d'information
	y_n^{opt} φ_n^{opt} c_n^{opt}	I_n
Diffusion en x_n	↓	↓
	y_n^{opt} φ_n^{opt} c_n^{opt}	$I_n^* = \left(I_n^{-1} + \delta\alpha_n^2\, \mathcal{A}\right)^{-1}$
Propagation de x_n à x_{n-1}	↓	↓
	$\begin{bmatrix} y'_{n-1} \\ \varphi'_{n-1} \\ c'_{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{D}_n \begin{bmatrix} y_n^{opt} \\ \varphi_n^{opt} \\ c_n^{opt} \end{bmatrix}$	$I'_{n-1} = \left(\mathcal{D}_n^{-1}\right)^t I_n^* \mathcal{D}_n^{-1}$
Prise en compte de la mesure en x_n	↓	↓
	y_{n-1}^{opt}, φ_{n-1}^{opt}, c_{n-1}^{opt} solutions de : $\mathcal{M}\begin{bmatrix} y^m - y'_{n-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(I'_{n-1} + \mathcal{M}\right)\begin{bmatrix} y - y'_{n-1} \\ \varphi - \varphi'_{n-1} \\ c - c'_{n-1} \end{bmatrix}$	$I_{n-1} = I'_{n-1} + \mathcal{M}$

Schématisation parabolique

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1/\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Généralisations :

trace à 5 paramètres $(y, z, a, b, 1/p)$

$$\mathcal{A} = (1 + a^2 + b^2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^2 & ab & 0 \\ 0 & 0 & ab & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mesure de $t = \lambda y + \mu z$ avec l'incertitude σ

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\mu & \mu^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A 4.3.3. Généralisations.

Nous allons maintenant considérer une trace dans l'espace à 3 dimensions, dans un champ non nécessairement uniforme : elle est définie par 5 paramètres (par exemple y, z, φ, λ et $1/p$ ou C à x fixé). Les matrices de covariance sont maintenant de dimension 5. Nous allons décrire ce que deviennent les trois phases de chaque étape de la récurrence. A la place de φ et λ , nous choisirons comme paramètres $a = tg\,\varphi = \frac{P_Y}{P_X}$ et $b = \frac{tg\,\lambda}{\cos\varphi} = \frac{P_Z}{P_X}$ plus directement liés aux cosinus directeurs, et qui permettent d'éviter les calculs trigonométriques.

A 4.3.3.1. Diffusion en x_n.

Elle affecte les paramètres a et b (ou φ et λ). Soit ξ_n le nombre de longueurs de radiation traversées de x_{n-1} à x_n Pour un milieu homogène :

$$\xi_n = \frac{\delta x_n}{X_0 \cos\lambda \cos\varphi} = \frac{\delta x_n}{X_0}\sqrt{1+a^2+b^2} \qquad (3.9)$$

Les angles de diffusion α_1 et α_2 dans deux plans passant par la direction de la trace et perpendiculaires entre eux sont des variables aléatoires indépendantes de variance $\delta\alpha_n^2 = (k/p)^2 \xi_n$, où k est une constante. Si l'on choisit l'un de ces plans vertical, l'angle de diffusion dans ce plan représente exactement la variation de λ , et l'autre la variation de φ multipliée par $\cos\lambda$: avec les paramètres φ et λ prendre en compte la diffusion consiste donc simplement à ajouter $\delta\alpha_n^2$ à $V_{\lambda\lambda}$ et $\delta\alpha_n^2/\cos^2\lambda$ à $V_{\varphi\varphi}$.

Si on adopte les paramètres a et b le calcul montre qu'il faut

ajouter

$$\begin{cases} (1+a^2+b^2)(1+a^2)\ \delta\alpha_n^2 & \grave{a} \quad V_{naa} \\ (1+a^2+b^2)(1+b^2)\ \delta\alpha_n^2 & \grave{a} \quad V_{nbb} \\ (1+a^2+b^2)\ ab\ \delta\alpha_n^2 & \grave{a} \quad V_{nab} \end{cases} \tag{3.10}$$

pour obtenir la matrice V_n^* .

En termes de matrices d'information, la diffusion se traduira par :

$$I_n^* = V_n^{*-1} = \left(I_n^{-1} + \delta\alpha_n^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \tag{3.11}$$

où A est une matrice 2 x 2

$$A = (1+a^2+b^2) \begin{bmatrix} 1+a^2 & ab \\ ab & 1+b^2 \end{bmatrix}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$I_n^* = I_n - I_n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A} & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I_n \tag{3.12}$$

avec

$$\mathcal{A} = \delta\alpha_n^2 \left(A^{-1} + \delta\alpha_n^2 \begin{bmatrix} I_{aa} & I_{ab} \\ I_{ab} & I_{bb} \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

Donc, comme pour la formule (3.6), le passage de I_n à I_n^* peut se faire en évitant les deux inversions de matrice (5 x 5) contenues dans (3.11).

A 4.3.3.2. Propagation de x_n à x_{n-1}.

L'extrapolation de la trace d'un point au précédent doit être précise : l'erreur cumulée sur toute la longueur de la trace doit rester petite par rapport à l'incertitude sur la position résultant de l'ajustement. Suivant la configuration du détecteur, différentes méthodes ont été proposées.

Ces méthodes permettent en principe de calculer la matrice D intervenant dans (3.1), soit par différentiation analytique, soit par différences finies.

En fait, dans le nombre de gauche de l'équation qui généralisera (3.7), seuls y'_{n-1}, φ'_{n-1} et c'_{n-1} ont besoin d'être calculés précisément. Pour $I'_{n-1} = (D^{-1})^t \, I_n^* \, D^{-1}$ on peut se contenter d'une approximation plus grossière de D, ne faisant intervenir que le champ moyen entre x_{n-1} et x_n, le long de la trace ; si la courbure entre ces deux points est assez faible, on peut écrire :

$$D \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\delta x_n & 0 & F\frac{\delta x_n^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\delta x_n & G\cdot\frac{\delta x_n^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -F\,\delta x_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -G\,\delta x_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

avec

$$F = \sqrt{1+a^2+b^2}\,\left[b H_x + ab H_y - (1+a^2) H_z\right]/H$$

$$G = \sqrt{1+a^2+b^2}\,\left[-a H_x + (1+b^2) H_y - ab H_z\right]/H$$

Les paramètres étant ici y, z, a, b, c.

A 4.3.3.3. Prise en compte de la mesure en x_{n-1}.

Dans beaucoup de cas la mesure consiste en la détermination de y ou z, ou d'une combinaison $t = \lambda y + \mu z$ pour une valeur de x fixée (la fabrication de points dans l'espace à partir des mesures brutes est ici inutile, et elle risque de faire perdre de l'information).

La vraisemblance de la mesure sera donc, dans l'approximation gaussienne :

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{(\lambda y + \mu z - t^{m}_{n-1})^{2}}{\sigma^{2}}\right]$$

et le système linéaire généralisant (3.4) s'écrira :

$$\left(I'_{n-1} + \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\mu & \mu^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} y-y'_{n-1} \\ z-z'_{n-1} \\ a-a'_{n-1} \\ b-b'_{n-1} \\ c-c'_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \lambda(t^{m}_{n-1} - \lambda y'_{n-1} - \mu z'_{n-1}) \\ \mu(t^{m}_{n-1} - \lambda y'_{n-} - \mu z'_{n-1}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

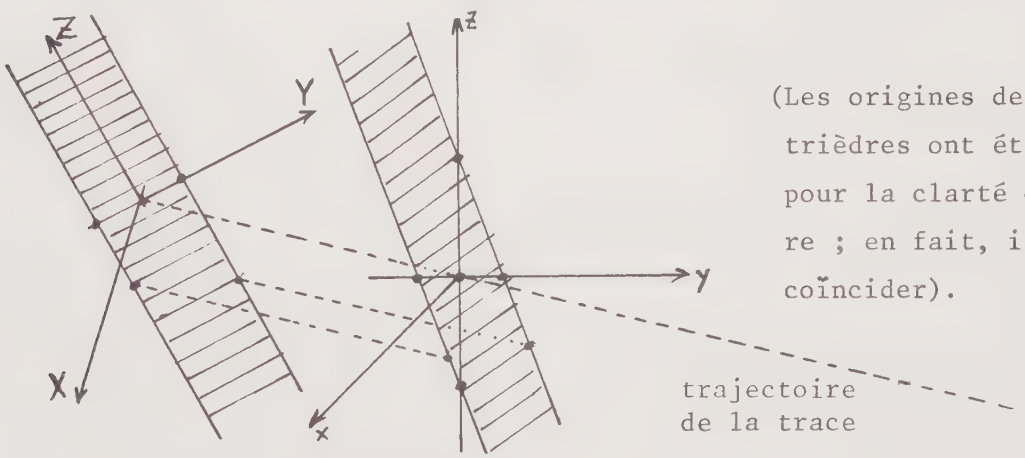
Naturellement si l'on dispose d'une mesure de y et z pour une même valeur de x (ou de deux combinaisons indépendantes de y et z) on peut les inclure simultanément dans une seule équation du type (3.9).

Dans le cas où l'information porte sur une combinaison non linéaire de y et z, on peut en général la linéariser au voisinage des valeurs mesurées.

Si on mesure une quantité qui dépend aussi de x (c'est le cas en particulier des mesures optiques) on peut se ramener à la mesure d'une (ou deux) variable(s) perpendiculaires(s) au premier axe par une rotation de référentiel : puisque nous n'avons pas astreint le référentiel à suivre, même approximativement, la direction de la trace, nous pouvons l'adapter en chaque point à l'orientation de la mesure ; nous avons déjà traité (annexe 1) le problème de la transformation d'une matrice d'erreurs (à x fixé) par une rotation quelconque du référentiel.

Il est équivalent, et en général moins coûteux en calcul, de transformer l'information brute en information à x fixé ; cette transformation dépend de la direction de la trace au voisinage du point de mesure, puisque l'information doit être projetée selon cette direction. On a donc besoin d'une première approximation de la trace pour l'effectuer.

Supposons par exemple que l'on mesure la coordonnée Y à X fixé, dans un référentiel orthonormé XYZ défini dans celui du laboratoire par les vecteurs unitaires (u_x, u_y, u_z), (v_x, v_y, v_z) et (w_x, w_y, w_z). Ceci revient à dire qu'on a une erreur σ en Y, et infinie (ou très grande) en Z, ce qu'on peut représenter par une "bande d'incertitude" $|Y| \leq \sigma$



(Les origines des deux trièdres ont été séparées pour la clarté de la figure ; en fait, ils devraient coïncider).

Se ramener aux variables y, z à x fixé revient à projeter les points du plan YZ dans le plan yz selon la direction de la trace, définie par le vecteur $(1, a, b)$. La forme gaussienne de la densité de probabilité

se conserve par cette projection, et une bande d'incertitude à un écart standard se projette sur une bande à un écart.

La projection se traduit par :

$$\begin{cases} y = v_y Y + w_y Z - a(v_x Y + w_x Z) = (v_y - a v_x) Y + (w_y - a w_x) Z \\ z = v_z Y + w_z Z - b(v_x Y + w_x Z) = (v_z - b v_x) Y + (w_z - b w_x) Z \end{cases} \tag{3.15}$$

La bande d'incertitude dans le plan yz est donc définie par la direction $(w_y - a w_x , w_z - b w_x)$, projection de la direction Z . La variable perpendiculaire dans ce plan est donc, à un facteur près :

$$t = (w_z - b w_x) y - (w_y - a w_x) z \quad , \text{ c'est-à-dire}$$

$$t = \left[(v_y - a v_x)(w_z - b w_x) - (v_z - b v_x)(w_y - a w_x) \right] Y$$

soit

$$t = (u_x + a u_y + b u_z) Y \tag{3.16}$$

ce qui donne immédiatement la variance de t :

$$\sigma_t^2 = (u_x + a u_y + b u_z)^2 \sigma^2 \tag{3.17}$$

On peut alors utiliser le formalisme (3.14).

Une mesure optique par caméra (comme pour une chambre à bulles) consistant en une projection sur un plan d'un point de la trace à partir d'un point de visée, peut se ramener à un traitement analogue. En effet, même si la projection n'est pas orthogonale, on peut définir localement un trièdre XYZ dans lequel la matrice d'erreurs (dérive de la bulle + erreur de mesure) est diagonale avec σ_Z^2 quasi-infini. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la trace dans ce référentiel. Du point de vue de l'information sur la trace, le cylindre elliptique d'incertitude, défini par la direction Z et les demi-axes σ_X et σ_Y , équivaut à une bande

d'incertitude dans un plan quelconque contenant la direction Z .

Si on choisit le plan YZ , la projection $(Y'Z')$ dans ce plan d'un point $(X\,Y\,Z)$ suivant la direction $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ est définie par :

$$\begin{cases} Y' = Y - \frac{\beta}{\alpha} X \\ Z' = Z - \frac{\gamma}{\alpha} X \end{cases} \qquad (3.18)$$

La variance de Y' est donc

$$\sigma_{Y'}^2 = \sigma_Y^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sigma_X^2 \qquad (3.19)$$

On est ainsi ramené au problème précédent.

A 4.3.3.4. Extension du formalisme à la perte d'énergie

Il est clair que la perte d'énergie entre tout naturellement dans le cadre mis en place pour la diffusion multiple : il suffit d'ajouter, dans l'étape de propagation, la quantité voulue au paramètre c . On peut en outre introduire une incertitude (supposée gaussienne) sur cette perte d'énergie, de façon analogue à ce qui a été décrit en 3.3.1, en ajoutant une contribution au terme V_{cc} de la matrice de covariance en même temps qu'on modifie V_{ac} , V_{ab} et V_{bb} .

Ici encore, on pourra être amené à faire différentes hypothèses de masse.

A 4.4. COMPARAISON ENTRE L'AJUSTEMENT OPTIMAL ET L'AJUSTEMENT STANDARD

A 4.4.1. Généralités :

Nous proposons de déterminer le gain en précision obtenu sur les différents paramètres, en examinant les mêmes modèles qu'en 2.2. et 2.3., avec les mêmes notations.

On peut prévoir qu'avec l'ajustement optimal, les variances des paramètres ne peuvent que décroître si on ajoute des points de mesure (puisque cela ne peut qu'augmenter l'information). Donc pour $n \to \infty$ elles doivent tendre vers des limites finies (éventuellement nulles). Nous nous placerons toujours implicitement dans le cas gaussien, et nous assimilerons donc (cf. 3.1.2) la matrice d'information d'un estimateur à l'inverse de sa matrice de covariance ; en outre (cf. 3.1.5.), la matrice d'information de l'ensemble des mesures est l'inverse de la matrice de covariance d'un estimateur efficace.

A 4.4.2. Diffusion en un seul point de la trace :

A 4.4.1.1. Méthode de calcul

Dans ce cas les mesures sur la deuxième position de trace (après L_o) sont indépendantes de celles sur la première portion (avant L_o), d'après leur expression (2.1). L'information totale sur les paramètres à l'origine est donc la somme des informations apportées par chacune des portions (ceci serait faux s'il y avait plusieurs diffusions successives).

Pour la deuxième portion, il sera commode d'évaluer d'abord l'information sur les paramètres en $x = L_o$, puis de tenir compte de la diffusion en $x = L_o$, et enfin de la propager jusqu'en $x = 0$.

A 4.4.2.2. Ajustement rectiligne

La deuxième portion fournit, sur les paramètres $z(L_o)$ et $\lambda(L_o)$ après diffusion, une information qu'on peut évaluer à partir de l'ajustement standard (optimal en l'absence de diffusion) sur $\Delta n = n - n_o$ points. D'après (2.2) la matrice d'information s'écrit :

$$I_2(L_o) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \Delta n & \frac{\Delta n^2 \ell}{2} \\ \cdots & \frac{\Delta n^3 \ell^2}{3} \end{bmatrix}$$

D'où la matrice d'information en $x = L_o$ avant diffusion:

$$I_2^*(L_o) = \left(I_2^{-1}(L_o) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta\alpha^2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \frac{\Delta n}{\sigma^2} \frac{1}{4(3+\xi)} \begin{bmatrix} 12+\xi & 6\,\Delta n\,\ell \\ \cdots & 4\,\Delta n^2 \ell^2 \end{bmatrix}$$

avec

$$\xi = \frac{\Delta n^3 \ell^2 \Delta\alpha^2}{\sigma^2}$$

Propageons cette information jusqu'en $x = 0$:

$$I_2'(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_o & 1 \end{bmatrix} I_2^*(L_o) \begin{bmatrix} 1 & L_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\Delta n}{\sigma^2} \frac{1}{4(3+\xi)} \begin{bmatrix} 12+\xi & [(12+\xi)n_o + 6\Delta n]\ell \\ \cdots & [(12+\xi)n_o^2 + 12 n_o \Delta n + 4\Delta n^2]\ell^2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La première portion, quant à elle, fournit simplement sur $z(0)$ et $\lambda(0)$ la matrice d'information :

$$I_1(0) = \frac{n_o}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{n_o \ell}{2} \\ \cdots & \frac{n_o^2 \ell^2}{3} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

D'où la matrice d'information totale, en posant $\eta = \frac{n}{n_0}$

$$I_{tot}(0) = \frac{n_0}{4\sigma^2(3+\xi)} \begin{bmatrix} 3\xi(4\eta+1)+12\eta & \xi(\eta+1)+6\eta^2 \\ \dots & \xi\left(\eta+\frac{1}{3}\right)+4\eta^3 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

L'inverse de $I_{tot}(0)$ n'est autre que la matrice de covariance des estimateurs optimaux de Z et λ . Les incertitudes sur ces paramètres (racines carrées des variances) sont représentées graphiquement en fonction de n sur la figure 1, pour comparaison avec les incertitudes de l'estimateur standard.

Nous évaluerons leurs limites pour $n \to \infty$ (ou $\eta \to \infty$) en remarquant que $\xi = \frac{\Delta n^3 \ell^2 \Delta\alpha^2}{\sigma^2} = \rho^2\eta^3$, où ρ est le même qu'en A 4.2.2. ; on ne garde donc que les deux termes de degré les plus élevés en η :

$$I_{tot}(0) \simeq \frac{n_0}{4\sigma^2} \begin{bmatrix} \eta+3 & (\eta+1)\, n_0 \ell \\ \dots & \left(\eta+\frac{1}{3}+\frac{4}{\rho^2}\right) n_0^2 \ell^2 \end{bmatrix}$$

Si on ne gardait que les termes en η , on aurait une matrice singulière (et dont les termes tendent vers l'infini) : ceci s'interprète simplement par le fait qu'il existe une combinaison de Z et λ qui est connue avec une incertitude tendant vers 0 ; ce n'est autre que $Z(L_0) = Z + L_0\lambda$, qui est fourni par la deuxième portion de la trace, avec une précision qui tend vers l'infini quand $\Delta n \to \infty$

L'inverse de I_{tot} , au premier en $\frac{1}{\eta}$, est :

$$V_{tot}(0) \simeq \frac{\sigma^2}{n_0\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{L_0} \\ \dots & \frac{1}{L_0^2} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

ce qui donne les limites pour $n \to \infty$

$$V_{zz}^{\infty} = L_o^2 \, V_{\lambda\lambda}^{\infty} = \frac{\sigma^2}{n_o\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{3}\right)} \qquad (4.5.)$$

Cette quantité est toujours inférieure à $\frac{3\sigma^2}{n_o}$ (elle en est très proche dès que ρ est grand devant 1). La limite $V_{\lambda\lambda}^{\infty}$ est petite, en général, par rapport au minimum dans l'ajustement classique. Cependant la convergence de $V_{\lambda\lambda}$ vers sa limite est lente (beaucoup plus que celle de V_{zz}), et si on se borne à des longueurs mesurables inférieures à quelques L_o , on voit sur la fig. A.4.1. que le gain de l'ajustement optimal par rapport aux minima de l'ajustement classique reste faible, aussi bien pour Z que pour λ , pour des valeurs de ρ réalistes.

A 4.4.2.3. *Ajustement parabolique* :

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, on a maintenant, pour les paramètres Y , φ , $\frac{c}{z}$:

$$I_2(L_o) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \Delta n & \frac{\Delta n^2}{2}\ell & \frac{\Delta n^3}{3}\ell^2 \\ \cdots & \frac{\Delta n^3}{3}\ell^2 & \frac{\Delta n^4}{4}\ell^3 \\ \cdots & \cdots & \frac{\Delta n^5}{5}\ell^4 \end{bmatrix} \qquad (4.6.)$$

d'où

$$I_2^*(L_o) = \left(I_2^{-1}(L_o) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

et

$$I_1(o) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} n_o & \frac{n_o^2}{2}\ell & \frac{n_o^3}{3}\ell^2 \\ \cdots & \frac{n_o^3}{3}\ell^2 & \frac{n_o^4}{4}\ell^3 \\ \cdots & \cdots & \frac{n_o^5}{5}\ell^4 \end{bmatrix} \qquad (4.7.)$$

Nous n'expliciterons pas le calcul de $I_{tot}(o)$. Pour $n \to \infty$ on trouve $V_{cc}^{\infty} = 0$, et $V_{YY}^{\infty} = L_o^2 \, V_{\varphi\varphi}^{\infty} = \frac{\sigma^2}{n_o\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\rho^2}\right)}$

c'est-à-dire la même limite que pour Z et λ dans l'ajustement rectiligne.

Ce fait peut s'interpréter de la façon suivante : avec une longueur infinie, on connaît le terme quadratique sans incertitude ; on peut donc le soustraire sans perte d'information, et on est ramené ainsi à calculer Y et φ par un ajustement rectiligne avec la même information que précédemment pour Z et λ .

La remarque sur le gain apporté par l'ajustement optimal à V_{zz} et $V_{\lambda\lambda}$ s'applique, elle aussi, à V_{YY} et $V_{\varphi\varphi}$. Pour la courbure, le gain peut être important pour une vaste gamme de longueurs mesurables (bien qu'asymptoliquement, pour une longueur infinie, les précisions se rejoignent ; elles sont d'ailleurs équivalentes à celle qu'on obtiendrait sans diffusion).

Le gain en précision est illustré graphiquement sur la fig. A.4.2.

A 4.4.3. Diffusion uniformément répartie :

A 4.4.3.1. Méthode de calcul :

En s'appuyant sur le formalisme développé en 3.2, on peut donner une expression récurrente de la matrice d'information de l'ajustement optimal. On désignera par I_n la matrice obtenue avec n points, pour les paramètres Z, λ ou $Y, \varphi, \frac{c}{2}$, et par V_n son inverse (la matrice de covariance). Si on dispose de $n+1$ points, I_n et V_n pourront s'appliquer à la portion de trace comportant tous les points sauf le premier ; le formalisme de récurrence permet alors d'incorporer le premier point, ce qui fournit I_{n+1} et V_{n+1} .

A 4.4.3.2. Ajustement rectiligne :

L'analogue de la formule (3.8.) donne ici :

$$I_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{bmatrix} \left(I_n^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta\alpha^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.8.)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{bmatrix} \left(I_n - \frac{\delta\alpha^2}{1+\delta\alpha^2 I_{n\lambda\lambda}} \begin{bmatrix} I_{nz\lambda}^2 & I_{nz\lambda} I_{n\lambda\lambda} \\ \cdots & I_{n\lambda\lambda}^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9.)$$

Cette expression suggère un développement en puissance de $\delta\alpha^2$, dont la validité sera précisée a posteriori. A l'ordre zéro, on trouve simplement :

$$I_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{bmatrix} I_n \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (I_{n+1})_{zz} &= (I_n)_{zz} + \frac{1}{\sigma^2} \\ (I_{n+1})_{z\lambda} &= (I_n)_{z\lambda} + \ell\,(I_n)_{zz} \\ (I_{n+1})_{\lambda\lambda} &= (I_n)_{\lambda\lambda} + 2\ell\,(I_n)_{z\lambda} + \ell^2 (I_n)_{zz} \end{aligned} \quad (4.10)$$

ce qui redonne l'information de l'estimateur standard en l'absence de diffusion (cf. (2.2.). Si on ne garde que les termes de plus haut degré en n :

$$I_n^{(0)} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} n & \frac{n^2\ell}{2} \\ \cdots & \frac{n^3\ell^2}{3} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Pour trouver l'ordre 1 (matrice $I_n^{(1)}$), on développe (4.8.) au premier ordre en $\delta\alpha^2$, en remplaçant I_n par $I_n^{(0)}$ dans les termes en $\delta\alpha^2$:

$$\left(I_{n+1}^{(1)} - I_n^{(1)}\right)_{zz} = \frac{1}{\sigma^2} - \delta\alpha^2 \left(I_n^{(0)}\right)_{zz}$$

$$\left(I_{n+1}^{(1)} - I_n^{(1)}\right)_{z\lambda} = \ell \left(I_n^{(1)}\right)_{zz} - \delta\alpha^2 \left(I_n^{(0)}\right)_{z\lambda} \left[\ell \left(I_n^{(0)}\right)_{z\lambda} + \left(I_n^{(0)}\right)_{\lambda\lambda}\right]$$

$$\left(I_{n+1}^{(1)} - I_n^{(1)}\right)_{\lambda\lambda} = \ell^2 \left(I_n^{(1)}\right)_{zz} + 2\ell \left(I_n^{(1)}\right)_{z\lambda} - \delta\alpha^2 \left[\ell \left(I_n^{(0)}\right)_{z\lambda} + \left(I_n^{(0)}\right)_{\lambda\lambda}\right]^2$$

ce qui donne, en ne gardant, là encore, que les termes de plus haut degré en n :

$$\left(I_n^{(1)}\right)_{zz} = \frac{1}{\sigma^2}\left(n - q^2\frac{n^5}{20}\right)$$

$$\left(I_n^{(1)}\right)_{z\lambda} = \frac{\ell}{\sigma^2}\left(\frac{n^2}{2} - \frac{13}{360}q^2n^6\right)$$

$$\left(I_n^{(1)}\right)_{\lambda\lambda} = \frac{\ell^2}{\sigma^2}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{11}{420}q^2n^7\right)$$

Donc, en résumé, en posant $\varepsilon = q^2n^4$

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} n\left(1-\frac{\varepsilon}{20}\right) & \frac{n^2\ell}{2}\left(1-\frac{13\,\varepsilon}{180}\right) \\ \cdots & \frac{n^3\ell^2}{3}\left(1-\frac{11\,\varepsilon}{140}\right) \end{bmatrix} \qquad (4.12)$$

La validité du développement est assurée si les termes en ε dans (4.12) sont petits devant 1, ce qui peut se résumer par $\varepsilon \ll 20$ (ce qui implique évidemment $q^2 \ll 1$).

Comme n intervient à la puissance 4 dans ε, l'expression (4.12) est une bonne approximation pour

$$n \lesssim \frac{1}{\sqrt{q}} \qquad (4.13)$$

Par inversion de $I_n^{(1)}$ au premier ordre en ε on trouve la matrice de covariance :

$$V_n^{(1)} = \sigma^2\begin{bmatrix} \frac{1}{n}\left(4+\frac{\varepsilon}{105}\right) & -\frac{1}{n^2\ell}\left(6+\frac{11\,\varepsilon}{210}\right) \\ \cdots & \frac{1}{n^3\ell^2}\left(12+\frac{13\,\varepsilon}{35}\right) \end{bmatrix} \qquad (4.14)$$

C'est-à-dire que $V_n^{(1)}$ est égale à la matrice de covariance de l'estimateur standard (cf. (2.11). En d'autres termes, celui-ci est quasi-optimal jusqu'à n de l'ordre de $1/\sqrt{q}$, et il est inutile dans ce domaine d'en chercher d'autres (par exemple en donnant aux points mesurés des poids décroissants).

Pour les grandes valeurs de n , on sait que $(V_n)_{zz}$ et $(V_n)_{\lambda\lambda}$ doivent décroître vers des limites ; on s'attend à ce que $(V_n)_{z\lambda}$ ait aussi une limite. D'après (4.8.) cette matrice limite V doit obéir à l'équation

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{bmatrix} \left(V + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta\alpha^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

ce qui peut s'écrire :

$$\left(V^{-1} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(V + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta\alpha^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\ell & 1 \end{bmatrix}$$

ou encore

$$V + \frac{1/\sigma^2}{1 + V_{zz}/\sigma^2} \begin{bmatrix} V_{zz}^2 & V_{zz} V_{z\lambda} \\ \cdots & V_{z\lambda}^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} V_{zz} - 2\ell V_{z\lambda} + \ell^2 V_{\lambda\lambda} & V_{z\lambda} - \ell V_{\lambda\lambda} \\ \cdots & V_{\lambda\lambda} + \delta\alpha^2 \end{bmatrix} . \qquad (4.16)$$

D'où un système de trois équations algébriques en V_{zz} , $V_{z\lambda}$ et $V_{\lambda\lambda}$. Ce système peut être mis sous la forme suivante, en posant $u = V_{zz}/\sigma^2$, $v = \ell V_{z\lambda}/\sigma^2$, $w = \ell^2 V_{\lambda\lambda}/\sigma^2$:

$$\begin{cases} u^4 = q^2 (1-u)(2-u)^2 \\ v^2 = q^2 (1-u) \\ w = q^2 \left(1 + \frac{u}{v}\right) \end{cases}$$

Quand q est petit, les solutions peuvent être développées en puissances de $\sqrt{q}$:

$$
\begin{aligned}
V_{zz}^{\infty} &= \sqrt{2\sigma^3 \ell \delta\alpha}\ \left(1 - \sqrt{\frac{q}{2}} - \frac{5}{8} q + \cdots\right) \\
V_{z\lambda}^{\infty} &= -\sigma\delta\alpha\ \left(1 - \sqrt{\frac{q}{2}} - \frac{3}{4} q + \cdots\right) \\
V_{\lambda\lambda}^{\infty} &= \sqrt{\frac{2\sigma\delta\alpha^3}{\ell}}\ \left(1 - \sqrt{\frac{q}{2}} + \frac{1}{8} q + \cdots\right)
\end{aligned}
\qquad (4.17)
$$

La fig. A 4.3. illustre la comparaison des incertitudes optimales aux incertitudes de l'estimateur standard : on voit que le gain est très modéré tant que la longueur mesurée est inférieure à la longueur optimale (définie en A 4.2.3. pour l'estimateur standard), mais qu'il croît ensuite très vite quand la longueur augmente.

Il est intéressant de comparer les limites V^{∞} trouvées précédemment (4.17) aux valeurs obtenues avec l'estimateur standard sur la trace tronquée à sa longueur optimale ; ces valeurs étaient, d'après (2.12) :

$$
\begin{aligned}
V_{zz}^{min} &= 1.550\ \sqrt{\sigma^3 \ell \delta\alpha} \\
V_{\lambda\lambda}^{min} &= 1.554\ \sqrt{\frac{\sigma\delta\alpha^3}{\ell}}
\end{aligned}
\qquad (4.18)
$$

On voit donc que, pour des valeurs de q petites devant 1, le gain de l'ajustement optimal, par rapport à l'ajustement standard tronqué, reste très limité, quelle que soit la longueur mesurable de la trace.

Une étude plus détaillée de la relation de récurrence (4.15) montre que la convergence des termes de V_n vers leur limite est, grosso modo, géométrique (les écarts à la limite sont des fonctions exponentielles de n), c'est-à-dire que la limite sera atteinte assez vite.

A 4.4.3.3. Ajustement parabolique

Pour les paramètres Y , φ , $\frac{c}{2}$, la relation de récurrence s'écrit, d'après (3.8.) :

$$I_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell & 1 & 0 \\ \frac{\ell^2}{2} & \ell & 0 \end{bmatrix} \left(I_n^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \ell & \frac{\ell^2}{2} \\ 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

En développant comme précédemment au premier ordre en $\varepsilon = q^2 n^4$ on trouve ici encore que pour $n \lesssim \frac{1}{\sqrt{q}}$, l'ajustement standard est quasi-optimal.

Pour $n \to \infty$, la limite de $(V_n)_{cc}$ doit être nulle, puisque l'estimateur standard avait déjà une limite nulle. Il en résulte que les limites de $(V_n)_{YY}$, $(V_n)_{Y\varphi}$ et $(V_n)_{\varphi\varphi}$ sont les mêmes que celles de $(V_n)_{ZZ}$, $(V_n)_{Z\lambda}$ et $(V_n)_{\lambda\lambda}$ dans l'ajustement rectiligne (4.17).

Les variances minimales de l'ajustement standard sont ici :

$$V_{YY}^{min} = 1.820 \sqrt{\sigma^3 \ell \delta\alpha}$$

$$V_{\varphi\varphi}^{min} = 2.159 \sqrt{\frac{\sigma \delta\alpha^3}{\ell}}$$

Le gain de l'ajustement optimal, par rapport à l'ajustement standard sur la trace tronquée à sa longueur optimale, est donc potentiellement plus grand qu'en l'absence de courbure ; toutefois on constate que, pour une même valeur de q , la convergence de $(V_n)_{YY}$ et $(V_n)_{\varphi\varphi}$ est beaucoup plus lente que celle de $(V_n)_{ZZ}$ et $(V_n)_{\lambda\lambda}$ (l'écart à la limite décroît en $1/n$, et non plus exponentiellement), et que celle de $(V_n)_{\varphi\varphi}$ est plus tardive que celle de $(V_n)_{YY}$. Il en résulte que pour les valeurs de n accessibles à la mesure, le gain réel sera assez faible (voir fig. A 4.4.).

Pour ce qui est de la courbure, la variance $(V_n)_{cc}$ de l'ajustement classique devient, pour n grand, équivalente à $\frac{5}{14} \frac{\delta\alpha^2}{n\ell^2}$ contre $\frac{1}{4} \frac{\delta\alpha^2}{n\ell^2}$ pour l'ajustement optimal : le gain asymptotique est donc modéré, et il le reste pour toute valeur de n .

A 4.5. CONCLUSION :

L'ajustement standard, appliqué à des traces lentes mesurées sur une grande longueur, aboutit à d'importantes pertes de précision sur la position et la direction initiales, et éventuellement aussi sur la courbure. On peut y remédier par des troncatures (c'est-à-dire en ignorant les points mesurés au-delà d'une certaine distance);dans le cas d'un milieu de mesure homogène, cette méthode n'est pas loin d'être optimale. Son gros inconvénient est que la longueur à laquelle il faut tronquer la trace dépend du paramètre dont on veut minimiser la variance, ce qui conduit à multiplier les ajustements pour une même trace.

L'ajustement optimal (sans perte d'information) peut être réalisé par récurrence. L'algorithme comporte a priori un grand nombre d'opérations matricielles, proportionnel au nombre de points de mesure. Mais les matrices en question sont toujours de la même dimension (5 en général) et certaines sont triangulaires : ceci permet d'utiliser sur ordinateur des sous-programmes rapides (sans tableaux indicés ni boucles).

Dans la mesure où les calculs liés au suivage des traces dans le champ magnétique ne doivent pas être notablement plus longs que dans un ajustement standard, l'algorithme récurrent apparaît comme une méthode utilisable dans la pratique.

Il peut être généralisé à différents types de mesures et de configurations expérimentales. Sous la forme exposée ici, il suppose toutefois que les erreurs de mesure peuvent être considérées comme gaussiennes ;

en particulier, pas plus que l'ajustement standard, il ne tient compte des corrélations pouvant apparaître entre différentes mesures discrètes le long d'une même trace (problème évoqué dans l'annexe 3).

LEGENDE DES FIGURES

Chapitre 1 :

1.1 Schéma de la ligne de faisceau
Les aimants ne sont pas représentés.
L'échelle n'est respectée, ni longitudinalement, ni transversalement.

1.2 Disposition des modules de chambres à étincelles dans l'OMEGA, avec les lignes de visée des caméras.

1.3 Disposition des éléments du système de déclenchement.

1.4 Organisation logique du déclenchement.

1.5 Chambre de coplanarité : impacts des particules sortantes.

1.6 Chambre de coplanarité : efficacité au passage d'un secteur au voisin.
En fonction de la position de l'impact par rapport à la ligne médiane, on a représenté la probabilité de réponse d'un secteur, ainsi que le "et" et le "ou" logiques de ce secteur et de son voisin (en moyenne sur l'ensemble des secteurs).

1.7 Digitisation par les caméras d'un événement de type C (traces convergentes) et d'un événement de type D (traces divergentes) ayant satisfait aux conditions de déclenchement.

Chapitre 2 :

2.1 Ecarts entre les composantes paramétrisées du champ magnétique et leurs valeurs interpolées à partir de la table de ROMEO (les écarts sont calculés sur un réseau parallélépipédique régulier et cartographiés suivant des coupes horizontales).

2.2 Premier filtre cinématique : écart entre l'impulsion calculée à partir de la courbure brute vue par les caméras (projection oblique) et l'impulsion obtenue après reconstruction complète.

2.3 Distribution de la variable discriminatoire δm^2 sur les lots de candidats élastiques après filtres et coupures. Les événements sont séparés suivant la valeur de la probabilité de l'ajustement cinématique à 3 contraintes.

Chapitre 3 :

3.1 Distribution de la probabilité de χ^2 de l'ajustement global du vertex, et des "pulls" des différents paramètres, après réajustement des matrices d'erreurs (événements à 3.0 GeV/c).

3.2 Comparaison des distributions de l'impulsion manquante et de la variable δm^2 obtenues avant et après l'ajustement global du vertex (événements à 3.0 GeV/c)

3.3 Distribution de la variable δm^2 après ajustement du vertex, aux différentes énergies (à 3 et 5 GeV/c, le pic élastique est représenté à une échelle différente de celle du fond, qui est très faible).
On a représenté sur cette figure l'intervalle qui servira à sélectionner les lots d'événements élastiques pour le calcul des sections efficaces.

3.4 Distributions de δm^2 : comparaison entre les événements C et les événements D, à 8 GeV/c.

Chapitre 4 :

4.1 Efficacité de la chambre de coplanarité, secteur par secteur, sous 2160 V.

4.2 Probabilité de perte d'un événement par interaction secondaire de l'une des particules sortantes.

4.3 Distributions angulaires brutes des événements élastiques sélectionnés : sur la même figure sont représentées les courbes d'acceptance (obtenues par simulation), ainsi que les distributions angulaires des événements voisins de l'intervalle de sélection, pour l'évaluation du fond.

a) événements $\bar{p}\,p$

b) " $\pi^- p$

4.4 Distribution de la probabilité de χ^2 de l'ajustement cinématique à 3 contraintes

4.5 Comparaison des distributions observées pour la position du vertex et l'azimuth, avec les prédictions de la simulation.

4.6 Comparaison des distributions des réponses des secteurs de la chambre de coplanarité avec les prédictions de la simulation.

4.7 Sections efficaces différentielles $\bar{p}\,p \to \bar{p}\,p$ et $\pi^- p \to \pi^- p$:

a) en fonction de $\cos \theta_{cm}$

b) en fonction de t

4.8 Distributions angulaires brutes des événements $\bar{p}\,p \to K^- K^+$ et $\pi^- \pi^+$ avec les courbes d'acceptance correspondantes.

4.9 Comparaison des sections efficaces observées à des modèles théoriques.

REFERENCES

/1/ J.F. Gunion, S.J. Brodsky, R. Blankenbecler
Phys. Lett. 39 B p.649 (1972)

/2/ J.F. Gunion, S.J. Brodsky, R. Blankenbecler
Phys. Rev. D 8 p.287 (1973)

/3/ S.J. Brodsky, G.R. Farrar
Phys. Rev. Lett. 31 p. 1153 (1973)

/4/ V.A. Matveev, R.M. Muradyan, A. N. Tavkhelidze
Lett. al Nuov. Cim. 7 p. 719 (1973)

/5/ S.J. Brodsky, G.R. Farrar
Phys. Rev. D 11, p1309 (1975)

/6/ P.V. Landshoff, J.C. Polkinghorne
Phys. Rev. D 8, p.927 (1973)

/7/ C. Aubret,A. de Bellefon, P. Benoît, J.M. Brunet, G. Tristram
L.P.C. 78-03 (Collège de France)

/8/ A. de Bellefon, F. Bourgeois, G. Schuler, C. Aubret, P. Benoît, P. Billoir, J.M. Brunet, G. Tristram
C.E.R.N./ EF 77-01

/9/ R. Schwarz, Thèse (Université de Neuchâtel 1982)

/10/ T.E.O. Ericson, T. Mayer-Kuckuck
Ann. Rev. Nucl. Sci. 16, p.183 (1963)

/11/ D.E. Plane C.E.R.N./Lab II/EA/Note 74-8

/12/ D.E. Plane C.E.R.N./SPS/EA 76-1

/13/ P. Bernard, P. Lazeyras, H. Lengeler, V. Vaghin
C.E.R.N. 68-29

/14/ P. Bernard, H. Lengeler, V. Vaghin
C.E.R.N./D II/Sep. 70-1

/15/ P. Benkheiri, Thèse (Université Paris VI 1978)

/16/ H. Wind C.E.R.N. DH/67-8

/17/ H. Wind Nucl. Instr. and Meth. 115 p.431 (1974)

/18/ D. Townsend C.E.R.N./OM/SPS/76-12

/19/ J.P. Dufey, J.D. Wilson
C.E.R.N./NP/OM/75-218

/20/ J.P. Dufey, J.D. Wilson
C.E.R.N./OM/SPS/76-18

/21/ J.D. Wilson C.E.R.N./NP/OM/615 (1974)

/22/ C.E.R.N. / HERA 75-2

/23/ A. Eide et al. Nucl. Phys. B 60 p.173 (1973)

/24/ K.A. Jenkins et al. Phys. Rev. D 21 p.2445 (1980)

/25/ J. Chauveau, Thèse (Université Paris VI 1981)

/26/ A. Eide et al. Nucl. Phys. B 60 p.173 (1973)

/27/ D. Sivers et al. Phys. Rep. 23 C p.1 (1976)

/28/ B. Schrempp, F. Schrempp
Phys. Lett. 55 B p.303 (1975)

/29/ G. Preparata, J. Soffer
C.E.R.N./TH-2801 (1979)
et communication privée

/30/ S.J. Brodsky, R. Blankenbecler
S.L.A.C. Pub. 1430

/31/ C. Baglin et al. C.E.R.N./EP/82-155

/32/ B. Pire Nucl. Phys. B 114 p.11 (1976)

/33/ B. Pire, J.P. Ralston
Phys. Lett. 117 B p. 233 (1982)

/34/ G.P. Lepage, S.J. Brodsky
Phys. Rev. D 22 p.2157 (1980)

/35/ D. Drijard C.E.R.N./D.Ph.II/Prog. 69-4

/36/ W.T. Eadie et al. Statistical methods in experimental physics
North Holland Publ. Co (1971)

Remerciements

Je voudrais remercier ici tous ceux qui ont pris part à la réalisation de l'expérience WA 13, à l'exploitation de ses résultats et à la mise en forme de cette thèse.

Avec la compétence et la disponibilité qui le caractérisent, le Professeur Marcel Froissart a bien voulu lire en détail l'ensemble du texte et lui apporter d'utiles critiques, ainsi que des suggestions pour la réalisation et la présentation de certains calculs.

L'expérience a été menée par des physiciens du C.E.R.N. : Peter Sonderegger, José Gago ; de l'Institut de Physique de Neuchâtel : Denis Perrin, Michel Bogdanski, Reinhard Schwarz ; du Collège de France : Alain de Bellefon, Jean-Michel Brunet, Pierre Rivet, Gérard Tristram et Albin Volte. Cette équipe relativement restreinte a permis de fréquentes et fructueuses rencontres pour faire progresser l'analyse des résultats.

Michel Fontannaz et Bernard Pire ont bien voulu discuter avec nous et nous éclairer sur les différents aspects théoriques des phénomènes étudiés.

La mise au point de la chambre de coplanarité et de l'électronique associée a été dirigée par Gérard Tristram, avec Claude Aubret et Pierre Benoit au Collège de France, et François Bourgeois et Georges Schuler au C.E.R.N.

Avec Reinhard Schwarz, qui a traité dans sa thèse les événements à deux neutres, j'ai partagé la tâche de mettre au point les programmes d'exploitation. Jean-Pierre Dufey et Jean-Claude Lassalle nous ont initiés au maniement de l'outil raffiné et complexe qu'est le programme ROMEO.

Pour la gestion des nombreuses bandes magnétiques et la comptabilité des événements, j'ai reçu l'aide de Catherine Fritsch et Danièle Levaillant, qui a aussi effectué des recherches bibliographiques.

Dans la phase finale j'ai été soutenu tout particulièrement par Jean-Michel Brunet qui s'est chargé du calcul des acceptances et de la mise au point de tout cet ensemble de détails qui permet d'obtenir des résultats définitifs.

La dactylographie irréprochable du texte et des tableaux est l'oeuvre d'Elisabeth Brochet et de Yolande Ruelle. Esther Chigner a dessiné et cadré une bonne partie des figures, ainsi que la couverture. Georges Arbousse-Bastide s'est chargé du tirage et de l'impression avec Xuan Le Tan, Ahmed Ben Raïs et Jacques Orillon.

Merci enfin à tous les membres du Laboratoire de Physique Corpusculaire qui m'ont facilité le travail et rendu la vie agréable.